探索自然对数——e

e是“指数”（exponential）的首字母，也是欧拉名字的首字母。和圆周率π及虚数单位i一样，e是最重要的数学常数之一。第一次把e看成常数的是雅各布•伯努利，他开始尝试计算lim（1+1/n） n 的值，1727年欧拉首次用小写字母“e”表示这常数，此后遂成标准。

自然对数的底e是一个令人不可思议的常数，一个由

lim(1+1/n)^n

定义出的常数，居然在数学和物理中频频出现，简直可以说是无处不在。这实在是让我们不得不敬畏这神奇的数学世界。

e的含义

e是一个重要的常数，但是它的直观含义却不像π那么明了。我们都知道，圆的周长与直径之比是一个常数，这个常数被称为圆周率，记作π=3.14159...，可是如果我问你，e代表了什么，你能回答吗？

不妨先来看看 维基百科 是怎么说的：

“e是自然对数的底数。”

但是，你去看” 自然对数 ”这个条目，得到的解释却是：

“自然对数是以e为底的对数函数，e是一个无理数，约等于2.718281828。”

这构成了循环定义，完全没有说e是什么。在这种情况下，数学家选择这样一个无理数作为底数，还号称这种对数很"自然"，这难道不是一件很奇怪的事情吗？

e是增长极限

到底什么是e？简单说来，e就是 **增长的极限** 。

下面这个例子就是对e直观含义的极好诠释:

某种类的一群单细胞生物每24小时全部分裂一次。在不考虑死亡与变异等情况下，那么很显然，这群单细胞生物的总数量每天都会增加一倍。据此我们可以写出它的增量公式：

growth= 2^x x表示天数

这个式子可以改写成如下的样子：

growth= (1+100%)^x 其中，1表示原有数量，100%表示单位时间内（24小时）的增长率。

根据细胞生物学，每过12个小时，也就是分裂进行到一半的时候，平均会新产生一半原数量的新细胞，新产生的细胞在之后的12小时内已经在分裂了。

因此一天24个小时可以分成两个阶段，每一个阶段的细胞数量都在前一个阶段的基础上增长50%：

$$growth=(1+\frac{100\%}{2})^2=2.25$$

即在一个单位时间内，这些细胞的数量一共可以增至为原数量的2.25倍。

倘若这种细胞每过8小时就可以产生平均1/3的新细胞，新生细胞立即具备独立分裂的能力，那就可以将1天分成3个阶段，在一天内时间细胞的总数会增至为：

$$growth=(1+\frac{100\%}{3})^3=2.37037$$

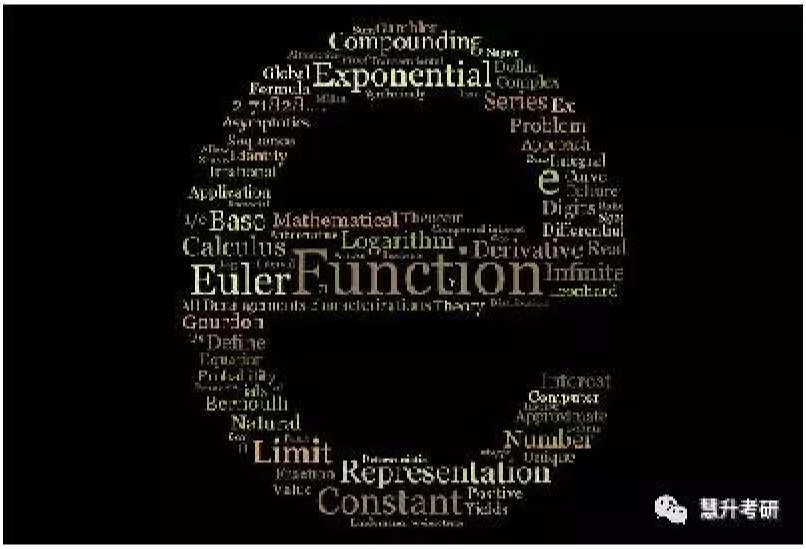
即最后细胞数扩大为2.37倍。

实际上，这种分裂现象是不间断、连续的，每分每秒产生的新细胞，都会立即和母体一样继续分裂，一个单位时间(24小时)最多可以得到多少个细胞呢？答案是：

$$growth=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{100\%}{n})^n=2.718281828...$$

当增长率为100%保持不变时，在单位时间内细胞种群最多只能扩大2.71828倍。 **数学家把这个数就称为e，它的含义是单位时间内，持续的翻倍增长所能达到的极限值** 。

这个值是自然增长的极限，是“自然律”的精髓所在，因此以e为底的对数，就叫做自然对数。



你不会自成“大款”——到e为止

有了这个值以后，计算银行的复利就非常容易。

假定有一家银行，每年的复利是100%，请问存入100元，一年后可以拿多少钱？

答案是：

$$\lim_{n \to \infty} 100(1+\frac{100\%}{n})^n = 100e = 271.828...$$

但是事实上，存储利息没有这么高，如果复利率只有5%，那么100元存一年可以拿到多少钱呢：

$$\lim_{n \to \infty} 100(1+\frac{5\%}{n})^n = ?$$

我们知道，在100%利息率的情况下，n=1000时，下式的值非常接近e：

$$(1+\frac{100\%}{1000})^{1000} = (1+0.1\%)^{1000} \approx e$$

为了便于思考，取n等于50：

$$100(1+\frac{5\%}{50})^{50} = 100(1+0.1\%)^{50}$$

当利息率是5%时，存款增长率就相当于e的20分之一次方：

$$(1+\frac{5\%}{50})^{50} = [(1+\frac{100\%}{1000})^{1000}]^{\frac{1}{20}} \approx e^{\frac{1}{20}}$$

1/20正好等于5%，所以我们可以把上式改写成：

$$growth = e^{rate}$$

再考虑时间因素，如果存款年限t年，那么存款最终增长率为：

$$growth = (e^r)^t = e^{r \cdot t} = e^{rt}$$

这说明e可以用于任何连续不断的复合式增长率的计算，而上式也是这个增长率的通用计算公式。

$$100 \cdot e^{5\% t} = 200$$

计算结果得13.86年：

$$t = \frac{ln2}{5\%} = \frac{0.693}{5\%} = \frac{69.3}{5} \approx \frac{72}{5}$$

可以看到：用72除以增长率就是翻倍的大致时间。这正是经济学上著名的72法则。

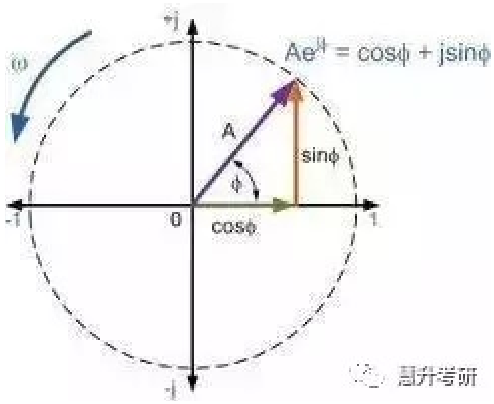
欧拉恒等式

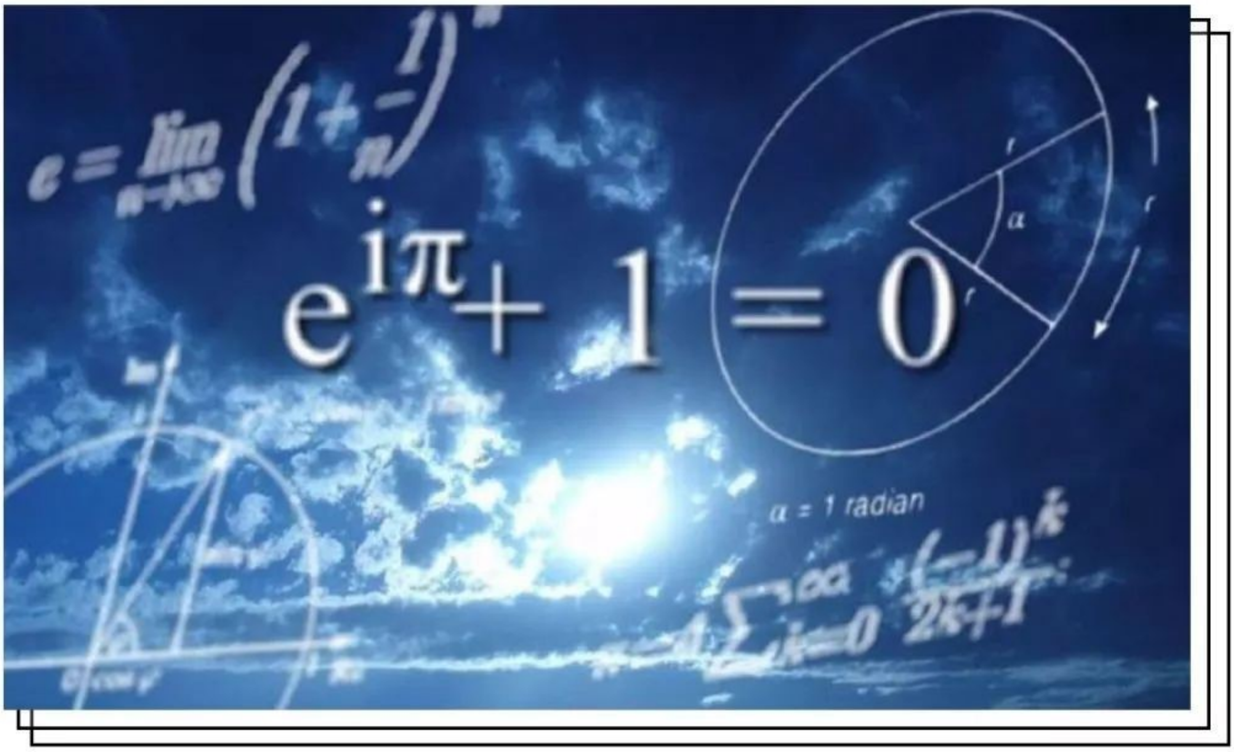
但凡说起e，一个必定要提到的公式就是欧拉恒等式——被誉为世界上最美丽的公式。

$$e^{i\pi}+1=0$$

数学中最基本的5个常数——0、1、圆周率π、自然对数的底e和虚数单位i，以及数学中最基本的两个符号,等号和加号，就这样通过一个简单的恒等式联系在了一起，实在是让人叹服。

这个等式有个一几何的直观解释。一个实数在实数轴上可以用一个向量表示，旋转这个向量，就相当于乘以一个虚数i。据此建立一个以实数为横轴，虚数为纵轴的坐标系。实单位向量，每次逆时针旋转π/2，可以分别得到结果1,i,-1,-i,1. 即转4次以后就回到了原位。而当实单位向量保持长度不变旋转θ角度，得到的向量就是：$\cos\theta+i\sin\theta$。根据欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta+i\sin\theta$可以看出 $e^{i\theta}$ 就代表实单位向量1旋转θ角后而得到的向量。所以 $e^{i\pi}$ 意味着单位向量逆时针旋转了π，结果显然是-1。





由《物理世界》（Physics World）发起的一项调查表明，人们把欧拉恒等式与麦克斯韦方程组一起并称为“史上最伟大的公式”，物理大师费曼也盛赞这个公式为“数学最非凡的公式”。那么，欧拉恒等式是如何推导出来的呢？

证明

事实上，欧拉恒等式有如下欧拉公式的一种特殊情况：

$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$$

只要令θ=π，就能直接得到欧拉恒等式。那么，上述的欧拉公式又是怎么来的呢?

这个公式可以通过对e^(iθ)进行泰勒展开得到：

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + i^2\frac{\theta^2}{2!} + i^3\frac{\theta^3}{3!} + i^4\frac{\theta^4}{4!} + i^5\frac{\theta^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots) \end{aligned}$$

增长规律

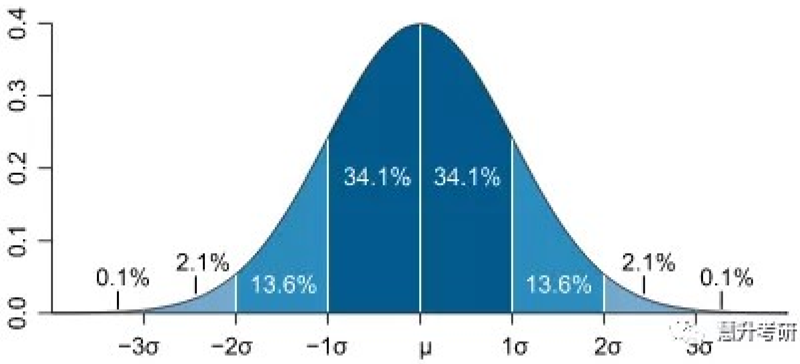
这个世界上有许许多多的事物满足这样的变化规律：增长率正比于变量自身的大小。例如放射性元素衰变的时候，衰变率就和现存的放射性物质多少成正比；资源无穷多的社会，人口出生率将（近似的）和现存人口数成正比等等。而此类变化规律所确定的解，则是由以e为底的指数增长所描述的：如果x的变化率等于变量x自身的λ倍，那么该变量随时间t的函数则为

$$x = Ce^{\lambda t}$$

慧升考研

其中C是任意常数。而e的直观含义正是增长的极限

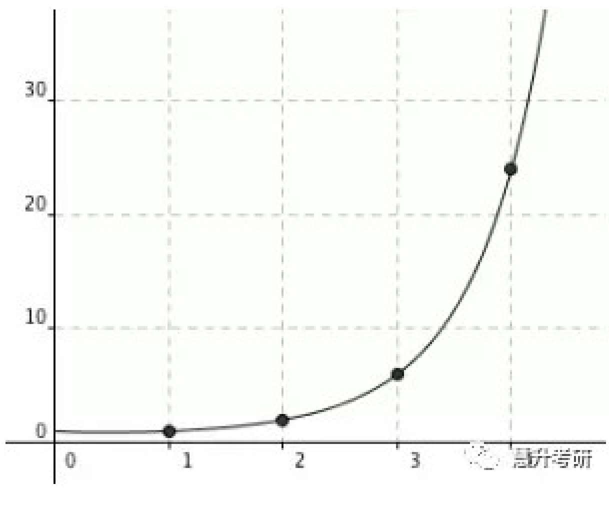
正态分布



正态分布是自然科学与行为科学中的定量现象的一个统计模型。各种各样的心理学测试分数和物理现象比如光子计数都被发现近似地服从正态分布，尽管这些现象的根本原因经常是未知的。而理论上则可以证明如果把许多小作用加起来看做一个变量，那么这个变量服从正态分布。
正态分布在生活中也可谓是无处不在。多次反复测量一个物理量，测出来的值一般来说总是呈正态分布；瓶装可乐的实际体积，也是正态分布；一大群人的寿命分布、智商分布等，也都是正态分布。而正态分布的表达式中，也神奇的出现了e。

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

伽马函数与斯特林公式



阶乘运算n！本来是定义在正整数上的。数学家最爱做的事情就是推广，因此阶乘函数自然不能幸免。当把阶乘函数推广到定义域为复数的时候，我们要寻找的函数就是一条通过了所有（n+1,n!）点的函数。所谓的伽马函数Γ(x)满足了这个性质，而伽马函数的表达式中又出现了e:

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt,\ (\mathrm{Re}z>0)$$

阶乘n!与e还有另一层神秘的联系。

当n趋于无穷大的时候，n!满足下面的近似关系式——斯特林公式：

$$n!\sim\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

（其中“~”符号表示同阶，可以大致认为是n趋于无穷大时的约等于）

要计算很大的阶乘值，位数受限而不能直接用计算机求出时，就可以用斯特林公式近似求出了。

调和级数

所谓调和级数，即1+1/2+1/3+1/4+...+1/n+...。它是一个发散级数，当n趋于无穷大的时候，这个和也将趋于无穷大。但是同样是发散的级数，发散也有快慢之分。调和级数发散速度是怎样的呢？伟大的欧拉发现的一个著名极限给出了答案：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma$$

（其中γ是一个确定的常数，称为欧拉常数，它的大小约为0.577…）

因此调和级数的发散速度正是和以e为底的对数——ln函数的发散速度一致。

素数与e

素数（或称质数）是指除了1和它本身之外，无法被其他自然数整除的数。素数看似和e毫无联系，可是，素数分布的理论指出，素数的分布与e息息相关。如果用π(x)表示不大于x的素数个数（注意这里的π不是圆周率！），那么素数分布中心定理指出

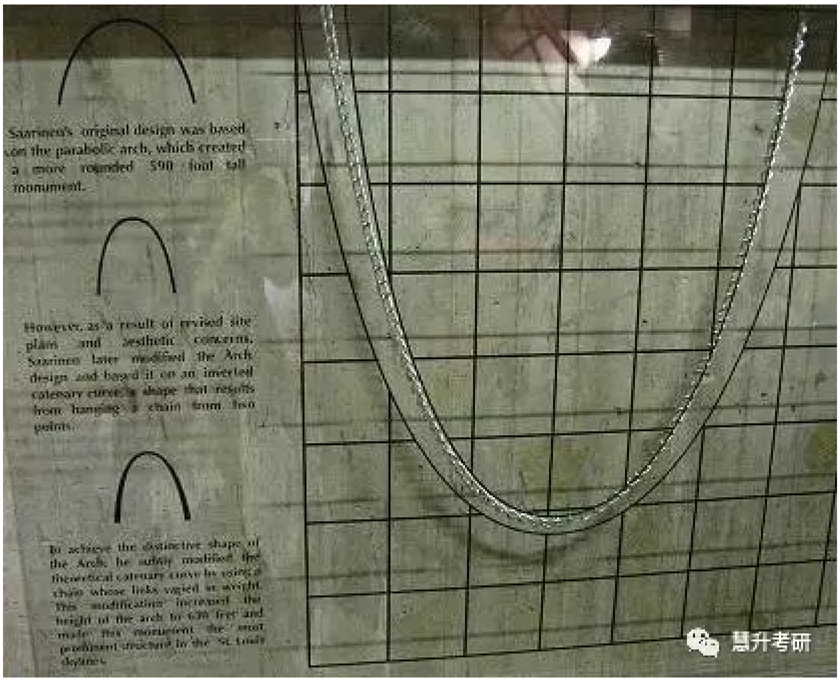
$$\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}$$（其中“~”符号仍表示同阶）

或者可以写成

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x}=1$$

注意到ln正是以e为底的对数。看，e就这样出现在了看似毫无关系的领域！

悬链线



数学史上曾经有一个著名问题，称之为悬链线问题：一根柔软不可伸长的链子，两头固定在空间中的两个定点上（这两个点不一定要等高），链子形成的曲线是怎样一条曲线呢？这个问题和最速降线问题提出的时间很接近，而且参与者也大多相同。早在文艺复兴时代它就已经被达芬奇研究过，可惜并没有得到答案。伽利略猜想答案是抛物线，这也和很多人最初的感觉是一致的，可惜后来被惠更斯在17岁的时候证明是错的。

和最速降线问题一样，这一问题伯努利兄弟中的一个也曾公开征集解答，不过这次是哥哥雅各布，他在1690年的《教师学报》中发表了这个问题。在雅各布提出这一问题一年后的1691年6月，《教师学报》发表了惠更斯（当时已经62岁）、莱布尼茨以及约翰•伯努利提交的三份正确答案。三人的方法都不一样，但最终的结果却是一致的。而雅各布自己则并没能把它解出来，这让弟弟约翰•伯努利异常兴奋。

悬链线的正确方程是这样的：

$$y = c\cosh\frac{x}{c} = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$$ （c是常数，它取决于链子的物理参数）

慧升考研

它的发现在当时被看做是新微积分伟大成果的重要标志。而现在，悬链线则在世界著名的标志性建筑物——密苏里的圣路易斯大拱门——中永垂不朽了。

e一次次如幽灵般恰当的出现在了每一处，时常给人们带来惊喜。而上述这些，只不过它的冰山一角而已。