湖南大学

硕士学位论文

与指数平均、幂平均相关的几个不等式

姓名：张春生

申请学位级别：硕士

专业：应用数学

指导教师：蒋月评

20100508

摘 要

在本论文中，我们的研究内容包括在常系数下两正数对数平均$L(a,b)$、指数平均$I(a,b)$与幂平均$M_p(a,b)$的不等式关系，以及在常系数下两正数调和平均、指数平均$I(a,b)$与幂平均$M_p(a,b)$的不等式关系，先在特定的常系数下，寻求出幂平均$M_p(a,b)$中常数p，然后结合泰勒展式的计算比较，得到量化关系。

本论文首先是研究在常系数下两个正数对数平均$L(a,b)$、指数平均$I(a,b)$与幂平均$M_p(a,b)$的不等式关系，目的是建立两正数对数平均$L(a,b)$、指数平均$I(a,b)$与幂平均$M_p(a,b)$常数指数下相关联的几个不等式，应用极限比较的方法，结合泰勒展开式的计算比较，我们得出几个常系数下，两个正数对数平均$L(a,b)$、指数平均$I(a,b)$与幂平均$M_p(a,b)$之间的不等式，得到量化关系，利用泰勒展开式验证，当幂平均$M_p(a,b)$的阶p取得特定的数值时，不等式处于最佳状态，同时也验证常数指数为特定值时，得到的结果与经典结果是相一致的。

其次还研究在常系数下两个正数调和平均$H(a,b)$、指数平均$I(a,b)$与幂平均$M_p(a,b)$的不等式关系，建立在常系数下两个正数调和平均$H(a,b)$、指数平均$I(a,b)$与幂平均$M_p(a,b)$相关联的几个不等式，同样应用极限比较、结合泰勒展开式的计算比较，通过计算比较某些函数的凹凸性、正负性，我们得出几个常系数下，两正数调和平均$H(a,b)$、指数平均$I(a,b)$与幂平均$M_p(a,b)$之间的不等式，得到量化关系，利用泰勒展开式验证，当幂平均$M_p(a,b)$的阶p取得特定的数值时，不等式处于最佳状态，同时也验证常数指数为特定值时，得到的结果与经典结果是相一致的。

关键词： 幂平均；对数平均；调和平均；指数平均

Abstract

In this paper, we investigate the some equalities related to identric mean $I(a,b)$, logarithmic mean$L(a,b)$, and power mean$M_p(a,b)$ of two positive real number a and b, and the inequality relationship of harmonic mean$H(a,b)$, identric mean $I(a,b)$, and power mean$M_p(a,b)$ of two positive real number a and b. Under some certain constant exponent, we obtain a suitable order p of power mean$M_p(a,b)$. Moreover, we use Taylar expansion to examine that this exponent is the optimal one.

Firstly, in Charpter 2, we study the relationship of identric mean $I(a,b)$, logarithmic mean$L(a,b)$, and power mean $M_p(a,b)$ of two positive real number. The purpose of this charpter is to founded some inequalities of identric mean $I(a,b)$, logarithmic mean$L(a,b)$, and power mean$M_p(a,b)$ of two positive real number. By using the method of limit comparison, together with Taylor expansion of special function, we obtain some inequalities of identric mean $I(a,b)$, logarithmic mean$L(a,b)$, and power mean$M_p(a,b)$ under some certain constant exponent conditions. The Taylor expansion imply that the order p of these inequalities is optimal to our results if p is some special contant. At same time, we also examine that our results is in accord to the classical ones.

Later, in Charpter 3, we study the relationship of harmonic mean $H(a,b)$, identric mean $I(a,b)$, and power mean$M_p(a,b)$ of two positive real number. The purpose of this charpter is to founded some inequalities of identric mean $I(a,b)$, harmonic mean $H(a,b)$, and power mean$M_p(a,b)$ of two positive real number. With the same progress, be using the method of limit comparison, together with Taylor expansion of special function, we investigate the convexity of some special function to obtain some inequalities of identric mean $I(a,b)$, harmonic mean$H(a,b)$, and power mean$M_p(a,b)$ under some certain constant exponent conditions. We also use the Taylor expansion to examine the order p of these inequalities is optimal to our results if p is some special contant. Moreover, we also examine that our results is in accord to the classical ones.

Key Words: power mean; logarthmic mean; harmonic mean; identric mean

第1章 绪论

1.1 课题的研究意义与历史

不等式的概念诞生非常早，早在人类以数量的形式对自然界的问题开始探寻的时候，不等式就出现了。随着数学基础的建立，数学分支的蓬勃发展，不等式已经成为了数学这门古老的自然科学中一个重要的分支，为数学科学的进步和发展做出了重要的贡献。

不等式最初是源自于一些迫切需要解决的实际问题，随着理论以及实际问题的逐步扩大化，不等式理论包含的内容不光涉及到数学研究分支的各个领域，同时也在日常生活和其他很多诸如物理，化学，天体学等等自然科学的方方面面发挥着重要的作用，参见文献[1-4]。尤其在没有微积分的时代，不等式成为计算最大，最小值的一个非常重要的工具(参见文献[1])。继而，许多的不等式应运而生，并逐渐成为数学研究中一个重要的分支理论基础。

不等式的历史渊源深厚，在数学的历史发展上有着重要的地位。在1999年，数学家Jack Abad 和Paul Abad 曾在美国数学学会的会议上指出了一百个历史上伟大的数学定理，其中就包含了若干重要的不等式定理结果。这些定理时至今日仍是数学研究中的经典结果，在许多的研究领域中起到重要的作用。

在不等式理论中，与均值函数相关的不等式十分有趣，并在很早的时候就被许多数学家进行了初步的研究，这也成为现代不等式理论的重要起源之一。远在古希腊时期，毕达哥拉斯学派中数学家、哲学家、物理学家阿尔希塔斯(Arhytas of Tarentum，约公元前375年前后) 深入研究并讨论了两正数的算术平均值、几何平均值和调和平均值比较理论，应用他的平均值方法在音乐理论方面硕果累累，被托勒密（Ptolemy）称为毕达哥拉斯学派最重要的理论家. 后来数学家们将算术平均、几何平均和调和平均值的比较推广到n维情形，法国大数学家柯西(Cauchy)，在研究数学分析中的"流数"问题时得到了著名的柯西不等式，这个不等式由很多的版本。其不同的版本以及相关的推广结论，在当代数学研究领域中起到了非常重要的作用。

例如，下面的算术、几何平均不等式就是柯西不等式的一个最初始的结果，目前仍在高中的数学课程中出现。

算术、几何平均不等式 对于任意的正数$a_1, a_2, ..., a_n$，都有下面的不等式成立：

$$\frac{a_1+a_2+......+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2......a_n}$$

而且，当且仅当$a_1=a_2=......=a_n$时，不等式的两端相等。

这个经典的不等式最早出现于欧几里得的《几何原本》[3]。在原本中，这个结果是以$n=2$的特殊形式出现，即$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$。在特殊情况$n=2$的结果得到后，随着越来越多的实际问题需要得到解决，在微积分理论仍未出现的时候，平均不等式的结果已经由特殊形式推广到如上所述的n维情况。目前流传最广的就是由数学大师柯西(Cauchy)提出的应用数学归纳法进行的证明和推广。即先应用一般的数学归纳法证明了命题对$n=2^m$(其中m是自然数)成立，然后证明命题在$n=k$为真时，亦对$n=k-1$为真，那么结合两个结果，均值不等式自然得证。

其后，多个版本的柯西不等式随着不同领域的发展研究的进程而出现。例如下面的一个柯西不等式在积分方面的推广形式就是著名的Cauchy-Schwarz 不等式。

Cauchy-Schwarz 不等式

$$|\langle\Psi_1(x),\Psi_2(x)\rangle|^2\leq\langle\Psi_1(x),\Psi_1(x)\rangle\langle\Psi_2(x),\Psi_2(x)\rangle$$

而今，在当代数学的研究中，我们已经不再具体区分这些形式，而是统一称之为Cauchy-Schwarz 不等式，所区别的不过是不同的版本问题而已。后来，柯西不等式仍得到了广泛的推广和应用。其中不乏一些经典的结果。诸如，应用算术、几何均值不等式，可以推导出与调和平均相关的均值不等式，即

$$\frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}}{n}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2a_n},$$

丹麦数学家Jensen给出在凸函数论中起重要作用的琴生不等式(Jensen's Ineqality)。

在微积分理论建立之后，还有一个柯西不等式在重要的推广就是著名的Hölder不等式。

Hölder不等式[5] 若指数p,q满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，且$p>1,q>1$的时候，那么有如下的不等式成立

$$\int_a^b|f(x)g(x)|dx\leq[\int_a^b|f(x)|^pdx]^{\frac{1}{p}}[\int_a^b|g(x)|^qdx]^{\frac{1}{q}}$$

这些柯西不等式的不同版本以及不同版本的推广，现在被广泛的应用于泛函分析，概率论，偏微分方程理论中，并起到了非常重要的作用。

通过上面的代表例子-柯西不等式，我们可以看到与均值函数相关的不等式在数学的发展中起到了非常关键的作用。在不等式的理论发展至今，特别是在微积分学基础建立之后，已经形成了深厚的理论研究基础，同时也具有了更为广泛的研究对象。在当前的数学研究中，甚至包括物理，化学，生物等等一系列自然科学的研究中，我们不难发现都有不等式研究的影子参见文献[4-6]。这些结果都以非

常经典的形式出现，这也表明与均值函数相关的不等式理论正在得到进一步的研究和讨论。

我们知道，几乎所有的数学问题都是源自与现实生活中的具体问题。许多的数学问题也都是从特殊情况得到关注，进而对之进行量化后进行一般情况的总结，推广。从不等式的发展中，我们也不难看到不等式的研究也是从特殊情况开始，进而推广到抽象空间的研究讨论，这也正好表明了不等式是随着数学的发展而一步一步发展至今的。大部分的不等式都具有结构精简，对称性(即将不等式中的未知量变换位置时，不等式仍然成立)，还有许许多多不等式等号成立的条件之精确性等等，都将极具数学代表特征的数学美刻画的非常深刻。

在当代数学的研究中，在以H.Alzer等为代表的许多数学家都仍然对均值函数的不等式的性质继续着进一步的研究。诸如Γ 函数，幂平均函数，算术平均函数等等一系列的均值函数相关的不等式的研究也取得了令人瞩目的成就，参见文献[6-32]。在国内方面，以齐峰、褚玉明为代表的数学家也在从事均值函数不等式的研究，参见文献[9,10,34-37]，均值不等式的一系列结果以非常好的形式出现。随着均值函数理论的进一步发展，与均值相关的不等式仍有许多的问题值得研究。在国内外学者的带领下，可以预见，在均值函数相关的不等式的研究中仍有许许多多未知的结果值得期待。

1.2 本文的研究内容及创新点

本文主要研究与幂平均函数相关的几个不等式。

在本文中，如无特殊说明，我们研究的都是自变量为正实数的均值函数。

现在，我们引入一些其他经典均值函数的概念。

幂平均函数

$$M_p(a,b)=\begin{cases}\left(\dfrac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, & p\neq 0,\\ \sqrt{ab}, & p=0.\end{cases}$$

指数平均

$$I(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{e}\left(\dfrac{a^a}{b^b}\right)^{\frac{1}{a-b}}, & b\neq a,\\ a, & b=a,\end{cases}$$

对数平均

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{b-a}{\log b-\log a}, & b\neq a,\\ a, & b=a,\end{cases}$$

还有经典的算术$A(a,b)=(a+b)/2$，几何平均$G(a,b)=\sqrt{ab}$，调和平均$H(a,b)=2ab/(a+b)$，其中$a,b>0$。这些经典均值有如下的关系，

$$\min\{a,b\}\le H(a,b)=M_{-1}(a,b)\le G(a,b)=M_0(a,b)\le L(a,b)$$
$$\le I(a,b)\le A(a,b)=M_1(a,b)\le \max\{a,b\}$$

其中当且仅当$b=a$时，每个不等式的等号成立。

这些都是均值函数不等式中的经典平均值函数，目前的一系列均值函数不等式的研究都是建立在与这些经典均值函数相关的基础上了，在本文中，我们对这些经典均值函数与幂平均函数的不等式关系进行了研究和讨论。

与幂平均函数$M_p(a,b)$ 性质相关的一系列不等式相关问题在近些年关于均值函数不等式的研究中被许多的数学家所关注。这些不等式结果以非常完美的形式出现，可参见文献[8-33]。众所周知，幂平均函数$M_p(a,b)$的性质非常好。对于固定的两正数a和b，具有$p\in R$阶的幂平均函数是连续的，且是严格递增的。

与幂平均值函数不同的是，指数平均函数以及对数平均函数由于其定义的形式较为复杂，给相关的证明和计算带来很大的困难，目前与指数均值函数，以及对数均值函数相关的结果仍是非常理想。同时，这也是一个值得考虑的问题。

在本文第二章中，我们尝试考虑对数均值函数、指数均值函数与幂平均函数的不等式关系。目的是建立两正数对数平均$L(a,b)$、指数平均$I(a,b)$与幂平均$M_p(a,b)$常数指数下相关联的几个不等式。应用极限比较的方法，结合泰勒展开式的计算比较，我们得出了几个常系数下，两正数对数平均、指数平均与幂平均之间的不等式，得到了较为准确的量化关系。并利用泰勒展开式验证了，当幂平均的阶p取得特定的数值的时候，不等式的最佳性质。其中也验证了常数指数为特定值的时候，得到的结果与经典结果是相一致的。

在本文的第三章中，我们建立了调和平均$H(a,b)$，指数平均$I(a,b)$ 和幂平均$M_p(a,b)$之间的几个不等式。同样应用极限比较、结合泰勒展开式的方法，通过计算比较某些函数的凸性、正负性来得到我们需要的结果。本章中得到的是在常指数下，调和平均、指数平均若干幂形式与幂平均的不等式关系。同时也通过泰勒展开式的计算和比较，验证了在幂平均的阶p取得特定的数值的时候，不等式的最佳性质。

本文的创新之处在于，建立了特定常数指数下，对数平均函数、指数平均函数、调和平均函数与经典的幂平均函数之间的新的不等式关系，为下一步变系数的推广做好了准备，这些结果是新的，也是有效的。本文所用的方法和工具相对简单，通过一些经典研究结果的分析，应用极限比较，泰勒公式的各种形式的展开，再加上实分析中一些简单的凸函数性质判断的方法和工具对我们的结果进行求证，尽量简化了计算和证明过程，但同时也验证了这些不等式结果的相关临界

值的准确性和不可提高性。

1.3 本文常用的预备知识、引理和记号

在均值函数不等式的研究中，我们经常会需要用到或者涉及到一些经典的已知结果。在本节中，我们将一些常用的经典的标记和已知结果作为引理给出。

引理1[6] 对于两正数的算术平均、几何平均、调和平均、幂平均、对数平均和指数平均之间，其基本关系如下：

$$\begin{aligned}\min\{a,b\} \le H(a,b) = M_{-1}(a,b) \le G(a,b) = M_0(a,b) \le L(a,b)\\ \le I(a,b) \le A(a,b) = M_1(a,b) \le \max\{a,b\}\end{aligned}$$

还有算术平均、几何平均与对数平均，指数平均之间的关系如下。

引理2[18,25] 对于所有的正实数$a,b>0$, 满足$a\ne b$, 都有下面的不等式

$$G^{\frac{2}{3}}(a,b)A^{\frac{1}{3}}(a,b) < L(a,b) < \frac{1}{3}A(a,b) + \frac{2}{3}G(a,b)$$

且

$$\frac{1}{3}G(a,b) + \frac{2}{3}A(a,b) < I(a,b)$$

均成立.

引理3[9] 不等式

$$M_{\frac{1}{3}}(a,b) \le \frac{1}{3}A(a,b) + \frac{2}{3}G(a,b) \le M_{\frac{1}{2}}(a,b)$$

对所有的实数$a,b>0$, 而且作为临界值的$\frac{1}{3}$ 是最佳的.

Alzer 和裘松良证明了如下的结果。

引理4[24] 令$a,b>0$ 是正实数，且满足$a\ne b$. 如果同时满足$a,b\ge e$, 那么

$$[G(a,b)]^{A(a,b)} < [L(a,b)]^{I(a,b)} < [A(a,b)]^{G(a,b)}.$$

而且，如果满足$0<a,b<e$, 那么

$$[A(a,b)]^{G(a,b)} < [I(a,b)]^{I(a,b)} < [G(a,b)]^{A(a,b)}$$

对所有的正实数$a,b>0$ 均成立. 还有

$$\alpha A(a,b) + (1-\alpha)G(a,b) < I(a,b) < \beta A(a,b) + (1-\beta)G(a,b)$$

for $\alpha \le \frac{2}{3}$, $\beta \ge 2/e = 0.73575...$ and $a,b>0$ with $a \ne b$.

幂平均与指数平均、对数平均的经典结果如下：

引理5[26,28-29] 对所有的正实数$a, b > 0$, 且$a \neq b$, 有如下的不等式

$$M_0(a,b) \leq L(a,b) \leq M_{\frac{1}{3}}(a,b), \quad M_{\frac{2}{3}}(a,b) \leq I(a,b) \leq M_{\log 2}(a,b),$$

$$M_0(a,b) \leq \sqrt{L(a,b)I(a,b)} \leq M_{\frac{1}{2}}(a,b),$$

$$\frac{1}{2}\left(L(a,b) + I(a,b)\right) < M_{\frac{1}{2}}(a,b)$$

其中，当且仅当$a = b$时，等号成立，且所有的临界指数均为最佳的。

H Alzer亦得到如下的结果。

引理6[27] 对两正实数$a, b > 0$，且满足$a \neq b$，有如下的不等式成立

$$\sqrt{G(a,b)A(a,b)} < \sqrt{L(a,b)I(a,b)} < \frac{1}{2}\left(L(a,b) + I(a,b)\right) < \frac{1}{2}\left(G(a,b) + A(a,b)\right).$$

最后说明，全文的符号编排方式：定理n.m.i表示第n章第m节第i个定理；公式(n,m,i)表示第n章第m节第i个估计式。

第 2 章 两正数指数平均、对数平均与幂平均的不等式

2.1 引言

在本章中，我们研究常指数下两正数的指数平均、对数平均与幂平均的不等式关系。即$I^{\frac{1}{3}}(a,b)L^{\frac{2}{3}}(a,b)$，$I^{\frac{2}{3}}(a,b)L^{\frac{1}{3}}(a,b)$ 与对应的p阶的幂平均之间的不等式关系。

对任意的实数$p\in R$，以两正数a 和b为变量的p阶的幂平均函数$M_p(a,b)$ 有着如下的定义：

$$M_p(a,b)=\begin{cases}\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, & p\neq 0,\\ \sqrt{ab}, & p=0.\end{cases}$$

对于实数$p\in R$，具有两正数a 和b为自变量的广义对数平均$L_p(a,b)$ 定义如下：

$$L_p(a,b)=\begin{cases}a, & a=b,\\ \left[\frac{a^{p+1}-b^{p+1}}{(p+1)(a-b)}\right]^{\frac{1}{p}}, & p\neq 0, p\neq -1, a\neq b,\\ \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}, & p=0, a\neq b,\\ \frac{b-a}{\ln b-\ln a}, & p=-1, a\neq b,\end{cases}$$

经典的幂平均函数的性质非常好，众所周知，其对某一对固定的a 和b 以及$p\in R$ 而言，它是连续函数，且是严格递增的。与幂平均函数类似，广义对数平均$L_p(a,b)$某一对固定的a 和b 以及$p\in R$ 也具有这个非常理想的性质。在近些年关于均值函数的不等式研究中，幂平均与广义对数平均的相关的结果也出现了很多，引起了广泛的关注. 但是由于广义对数的定义较复杂，因此讨论起来经常会分多种情况进行分别讨论。有些情况下，在目前的方法和手段仍然未做到对之进行完美的分析和解释。其中广义对数的特殊情况对数平均也是广泛受到关注的一种情形，一些结果非常有趣。

回忆那些经典均值函数，我们分别用记号$A(a,b)=\frac{a+b}{2}$，$I(a,b)=\frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}$，$L(a,b)=\frac{b-a}{\ln b-\ln a}$，$G(a,b)=\sqrt{ab}$ 和$H(a,b)=\frac{2ab}{a+b}$ 来表示与两正数a 和b为自变量的算数平均函数、指数平均函数、对数平均函数，几何平均函数以及调和平均函数那么他们有如下的基本不等式关系成立。即

$$\begin{aligned}\min\{a,b\}&\leq H(a,b)\leq G(a,b)=L_{-2}(a,b)\leq L(a,b)=L_{-1}(a,b)\\ &\leq I(a,b)=L_0(a,b)\leq A(a,b)=L_1(a,b)\leq\max\{a,b\}.\end{aligned}$$

Alzer 和Janous 建立了下面的双边不等式关系:

$$M_{\frac{\log 2}{\log 3}}(a,b) \le \frac{2}{3}A(a,b) + \frac{1}{3}G(a,b) \le M_{\frac{2}{3}}(a,b)$$

对于任意的实数$\alpha \in (0,1)$, Janous讨论了使得下面不等式

$$M_p(a,b) \le \alpha A(a,b) + (1-\alpha)G(a,b) \le M_q(a,b)$$

成立的最大临界值p 以及最小临界值q的取值情况。

后来, 一般对数平均函数$L(a,b)$ 和指数平均$I(a,b)$ 与经典平均几何平均$G(a,b)$ 以及$A(a,b)$的不等式关系也被建立.

还有一些其他的结果也值得关注.

引理2.1.1 对于任意的$\alpha \in (0,1)$, 总有$G^{\alpha}(a,b)A^{1-\alpha}(a,b) \ge L_{\frac{2}{\alpha-2}}(a,b)$ 对所有的$a,b>0$均成立, 其中, 当且仅当$a=b$时, 等号成立. 这里的与均值函数$L_{\frac{2}{\alpha-2}}(a,b)$ 相关的临界值$\frac{2}{\alpha-2}$ 是最佳的.

引理2.1.2 对所有的正实数a , b 且$a \neq b$, 有下面的不等式

$$L(a,b) < \frac{1}{3}A(a,b) + \frac{2}{3}G(a,b)$$

以及

$$\frac{1}{3}G(a,b) + \frac{2}{3}A(a,b) < I(a,b)$$

成立.

引理2.1.3. 若$\alpha \in (0,1)$, 那么有如下的不等式成立, $G^{\alpha}(a,b)A^{1-\alpha}(a,b) \le L_{1-3\alpha}(a,b)$ 对所有的$a,b>0$, 其中，当且仅当$a=b$时, 等号成立. 这里的与均值函数$L_{1-3\alpha}(a,b)$有关的临界值$1-3\alpha$是最佳的.

本章中，我们主要讨论广义对数平均的常见特殊情况，指数平均函数与对数平均函数和经典幂平均函数之间的一些常数系数情况下的不等式情形。由于指数平均的超定性，我们的结果仅限于常数指数的情况。

2.2 引理及其证明

为了方便主要结果的证明，我们需要下面的引理。

引理2.2.1 令

$$\begin{aligned} g(t) = &-(1-r)(t+t^{p+1})\log^2 t + (t^{p+1} - t^p + t^2 - t)\log t \\ &-r(t-1)^2(1+t^p). \end{aligned}$$

那么有如下的估计成立.

1)如果$r=\frac{1}{3}$ 且$p=\frac{5}{9}$, 那么对所有的$t\in(1,+\infty)$, 均有$g(t)<0$,

2)如果$r=\frac{2}{3}$ 且$p=\frac{4}{9}$, 那么对所有的$t\in(1,+\infty)$, 均有$g(t)<0$.

证明:

为了方便证明，尽量的简化计算的过程，我们不妨做一些小小的变换，这并不影响我们的证明。

首先

$$g(1)=0, \tag{2.2.1}$$

$$\begin{aligned}g'(t)=&-(1-r)[1+(p+1)t^p]\log^2 t+[(p+2r-1)t^p-pt^{p-1}+2t+2r-3]\\&\log t+(1-2r)(t-1)-(rp+1)t^{p-1}+(2rp+2r+1)t^p\\&-r(p+2)t^{p+1},\end{aligned}$$

令$g_1(t)=t^{-p}g'(t)$, 得到

$$\begin{aligned}g_1(t)=&-(1-r)[t^{-p}+(p+1)]\log^2 t+(1-2r)t^{1-p}-(rp+1)t^{-1}+(2rp+\\&2r+1)+[(p+2r-1)-pt^{-1}+2t^{1-p}+(2r-3)t^{-p}]\log t\\&-r(p+2)t+(2r-1)t^{-p},\end{aligned}$$

$$g_1(1)=0, \tag{2.2.2}$$

$$\begin{aligned}g_1'(t)=&\,p(1-r)t^{-p-1}\log^2 t+[(-2+2r+3p-2rp)t^{-p-1}+2(1-p)t^{-p}\\&+pt^{-2}+(-2+2r-2p+2rp)t^{-1}]\log t+(rp-p+1)t^{-2}\\&+(p-1+2r)t^{-1}-r(p+2)+(3-2r-p+2rp)t^{-p}\\&+(2r-3+p-2rp)t^{-p-1},\end{aligned}$$

令$g_2(t)=t^{p+1}g_1'(t)$,得到

$$\begin{aligned}g_2(t)=&\,p(1-r)\log^2 t+[(-2+2r+3p-2rp)+2(1-p)t\\&+pt^{p-1}+(-2+2r-2p+2rp)t^p]\log t+(rp-p+1)t^{p-1}\\&+(p-1+2r)t^p-r(p+2)+(3-2r-p+2rp)t\\&+(2r-3+p-2rp),\end{aligned}$$

$$g_2(1)=0, \tag{2.2.3}$$

$$\begin{aligned}g_2'(t)=&\,[2p(1-r)t^{-1}+2(1-p)+p(p-1)t^{p-2}+(-2+2r-2p+2rp)pt^{p-1}]\log t\\&+(-2+2r+3p-2rp)t^{-1}+(5-2r-3p+2rp)\\&+(rp^2-p^2+3p-rp-1)t^{p-2}-r(p+1)(p+2)t^p\\&+(-2+2r-3p+p^2+4rp)t^{p-1},\end{aligned}$$

令$g_3(t)=t^{2-p}g_2'(t)$,得到

$$\begin{aligned}g_3(t)=&[2p(1-r)t^{1-p}+2(1-p)t^{2-p}+p(p-1)+(-2+2r-2p+2rp)pt]\log t\\&+(-2+2r+3p-2rp)t^{1-p}+(5-2r-3p+2rp)t^{2-p}\\&+(rp^2-p^2+3p-rp-1)-r(p+1)(p+2)t^2\\&+(-2+2r-3p+p^2+4rp)t,\end{aligned}$$

$$g_3(1)=0, \tag{2.2.4}$$

$$\begin{aligned}g_3'(t)=&[2p(1-p)(1-r)t^{-p}+2(1-p)(2-p)t^{1-p}+(-2+2r-2p+2rp)p]\log t\\&+(-2+2r+7p-6rp-3p^2+2rp^2)t^{-p}-2r(p+1)(p+2)\\&+(12-4r-13p+6rp+3p^2-2rp^2)t^{1-p}\\&+(-2+2r-5p-p^2+6rp+2rp^2)+(p^2-p)t^{-1},\end{aligned}$$

令$g_4(t)=t^pg_3'(t)$,得到

$$\begin{aligned}g_4(t)=&[2p(1-p)(1-r)+2(1-p)(2-p)t+(-2+2r-2p+2rp)pt^p]\log t\\&+(-2+2r+7p-6rp-3p^2+2rp^2)-2r(p+1)(p+2)t^p\\&+(12-4r-13p+6rp+3p^2-2rp^2)t\\&+(-2+2r-5p-p^2+6rp+2rp^2)t^p+(p^2-p)t^{p-1},\end{aligned}$$

$$g_4(1)=8-4p-12p, \tag{2.2.5}$$

$$\begin{aligned}g_4'(t)=&[2(1-p)(2-p)+(-2+2r-2p+2rp)p^2t^{p-1}]\log t\\&+(2p-2p^2-2rp+2rp^2)t^{-1}+(p^3-2p^2+p)t^{p-2}\\&+(16-4r-19p+6rp+5p^2-2rp^2)-2r(p+2)(p+1)^2t^p\\&+(-4p+4rp-7p^2-p^3+8rp^2+2rp^3)t^{p-1},\end{aligned}$$

令$g_5(t)=t^{1-p}g_4'(t)$, 得到

$$\begin{aligned}g_5(t)=&[2(1-p)(2-p)t^{1-p}+(-2+2r-2p+2rp)p^2]\log t\\&+(2p-2p^2-2rp+2rp^2)t^{-p}+(p^3-2p^2+p)t^{-1}\\&+(16-4r-19p+6rp+5p^2-2rp^2)t^{1-p}-2r(p+2)(p+1)^2t\\&+(-4p+4rp-7p^2-p^3+8rp^2+2rp^3),\end{aligned}$$

$$g_5(1)=16-8r-20p-2rp-6p^2, \tag{2.2.6}$$

$$
\begin{aligned}
g_5'(t) = &\ 2(1-p)^2(2-p)t^{-p}\log t + (-2p^2+2p^3+2rp^2-2rp^3)t^{-p-1} \\
&+(20-4r-41p+26p^2+10rp-5p^3-8rp^2+2rp^3)t^{-p} \\
&+(-2p^2+2rp^2-2p^3+2rp^3)t^{-1}-2r(p+2)(p+1)^2 \\
&+(-p^3+2p^2-p)t^{-2},
\end{aligned}
$$

令$g_6(t)=t^p g_5'(t)$, 得到

$$
\begin{aligned}
g_6(t) = &\ 2(1-p)^2(2-p)\log t + (-2p^2+2p^3+2rp^2-2rp^3)t^{-1} \\
&+(20-4r-41p+26p^2+10rp-5p^3-8rp^2+2rp^3) \\
&+(-2p^2+2rp^2-2p^3+2rp^3)t^{p-1}-2r(p+2)(p+1)^2t^p \\
&+(-p^3+2p^2-p)t^{p-2},
\end{aligned}
$$

$$
g_6(1)=20-8r-42p+24p^2-12rp^2-6p^3, \tag{2.2.7}
$$

$$
\begin{aligned}
g_6'(t) = &\ 2(1-p)^2(2-p)t^{-1} + (2p^2-2p^3-2rp^2+2rp^3)t^{-2} \\
&+(-p^3+2p^2-p)(p-2)t^{p-3}-2r(p+2)(p+1)^2pt^{p-1} \\
&+(-2p^2+2rp^2-2p^3+2rp^3)(p-1)t^{p-2},
\end{aligned}
$$

令$g_7(t)=t^{3-p}g_6'(t)$, 得到

$$
\begin{aligned}
g_7(t) = &\ 2(1-p)^2(2-p)t^{2-p} + (2p^2-2p^3-2rp^2+2rp^3)t^{1-p} \\
&+(-p^3+2p^2-p)(p-2)-2r(p+2)(p+1)^2pt^2 \\
&+(-2p^2+2rp^2-2p^3+2rp^3)(p-1)t,
\end{aligned}
$$

$$
g_7(1)=4-8p+7p^2-4rp-14rp^2-6rp^3-3p^4, \tag{2.2.8}
$$

$$
\begin{aligned}
g_7'(t) = &\ 2(1-p)^2(2-p)^2t^{1-p}-4r(p+2)(p+1)^2pt \\
&+(2p^2-2p^3-2rp_2^2rp^3)(1-p)t^{-p} \\
&+(p-1)(-2p^2+2rp^2-2p^3+2rp^3),
\end{aligned}
$$

令$g_8(t)=t^p g_7'(t)$, 得到

$$
\begin{aligned}
g_8(t) = &\ 2(1-p)^2(2-p)^2t-4r(p+2)(p+1)^2pt^{1+p} \\
&+(2p^2-2p^3-2rp_2^2rp^3)(1-p) \\
&+(p-1)(-2p^2+2rp^2-2p^3+2rp^3)t^p,
\end{aligned}
$$

$$
g_8(1)=2(1-p)^2(2-p)^2+4p^2(1-r)(1-p)-4rp(p+2)(p+1)^2, \tag{2.2.9}
$$

$$g_8'(t) = 2(1-p)^2(2-p)^2 - 4r(p+2)(p+1)^3pt^p$$
$$+(p-1)(-2p^2+2rp^2-2p^3+2rp^3)pt^{p-1},$$

令$g_9(t) = t^{1-p}g_8'(t)$, 得到

$$g_9(t) = 2(1-p)^2(2-p)^2t^{1-p} - 4r(p+2)(p+1)^3pt$$
$$+(p-1)(-2p^2+2rp^2-2p^3+2rp^3)p,$$

$$g_9(1) = 2(1-p)^2(2-p)^2 + 2p^3(1-r)(1-p^2) - 4r(p+2)(p+1)^3p, \quad (2.2.10)$$

$$g_9'(t) = 2(1-p)^3(2-p)^2t^{-p} - 4r(p+2)(p+1)^3p$$

最后令$g_{10}(t) = t^pg_9'(t)$, 得到

$$g_{10}(t) = 2(1-p)^3(2-p)^2 - 4r(p+2)(p+1)^3pt^p,$$

$$g_{10}(1) = 2(1-p)^3(2-p)^2 - 4r(p+2)(p+1)^3p. \quad (2.2.11)$$

以及

$$g_{10}'(t) = -4rp(p+2)(p+1)^3pt^{p-1}. \quad (2.2.12)$$

现在分情况进行讨论:

1)如果$r=\frac{1}{3}$ 且$p=\frac{5}{9}$, 那么对所有的$t\in(1,+\infty)$, 有如下估计:

$$g_{10}'(t) = -4rp(p+2)(p+1)^3pt^{p-1} < 0. \quad (2.2.13)$$

而且

$$\lim_{t\to+\infty} g_{10}(t) = -\infty. \quad (2.2.14)$$

以及一系列的符号判别如下。

$$g_{10}(1) = 2(1-p)^3(2-p)^2 - 4r(p+2)(p+1)^3p < 0. \quad (2.2.15)$$

$$g_9(1) = 2(1-p)^2(2-p)^2 + 2p^3(1-r)(1-p^2) - 4r(p+2)(p+1)^3p < 0. \quad (2.2.16)$$

$$g_8(1) = 2(1-p)^2(2-p)^2 + 4p^2(1-r)(1-p) - 4rp(p+2)(p+1)^2 < 0. \quad (2.2.17)$$

$$g_7(1) = 4 - 8r + 7p^2 - 4rp - 14rp^2 - 6rp^3 - 3p^4 < 0. \quad (2.2.18)$$

$$g_6(1) = 20 - 8r - 42p + 24p^2 - 12rp^2 - 6p^3 < 0. \quad (2.2.19)$$

$$g_5(1) = 16 - 8r - 20p - 2rp - 6p^2 = 0. \quad (2.2.20)$$

$$g_4(1) = 8 - 4r - 12p = 0. \quad (2.2.21)$$

(2.2.13)式表明函数$g_{10}(t)$ 在区域$(1,+\infty)$上是严格单调递减的, 那么从(2.2.14), (2.2.15)式以及$g_{10}(t)$的单调性, 很容易得知对所有的$t\in(1,+\infty)$均有$g_{10}(t)<0$ 成立。进而暗含了函数$g_9(t)$在区域$(1,+\infty)$上是严格单调递减的。由(2.2.16)式, 不难看出函数对所有的$t\in(1,+\infty)$, 均有$g_9(t)<0$成立。这也就是说$g_8(t)$ 在区域$(1,+\infty)$上是严格单调递减的。于是，由(2.2.17) 式我们不难得到$g_8(t)<0$ 对所有的$t\in(1,+\infty)$ 均成立. 则函数$g_6(t)$ 在区域$(1,+\infty)$上是严格递减的。因此，通过逐层逆推，由(2.2.17), (2.2.18)-(2.21)式和(2.2.1)-(2.2.3)式联系$g_8(t)$的单调性，我们得到$g(t)<0$ 对所有的$t\in(1,+\infty)$均成立。

2)如果$r=\frac{2}{3}$ 且$p=\frac{4}{9}$, 那么对所有的$t\in(1,+\infty)$, 有如下估计.

$$g_{10}'(t)=-4rp(p+2)(p+1)^3pt^{p-1}<0. \tag{2.2.22}$$

而且

$$\lim_{t\to+\infty}g_{10}(t)=-\infty. \tag{2.2.23}$$

以及一系列的符号判别如下。

$$g_{10}(1)=2(1-p)^3(2-p)^2-4r(p+2)(p+1)^3p<0. \tag{2.2.24}$$

$$g_9(1)=2(1-p)^2(2-p)^2+2p^3(1-r)(1-p^2)-4r(p+2)(p+1)^3p<0. \tag{2.2.25}$$

$$g_8(1)=2(1-p)^2(2-p)^2+4p^2(1-r)(1-p)-4rp(p+2)(p+1)^2<0. \tag{2.2.26}$$

$$g_7(1)=4-8r+7p^2-4rp-14rp^2-6rp^3-3p^4<0. \tag{2.2.27}$$

$$g_6(1)=20-8r-42p+24p^2-12rp^2-6p^3<0. \tag{2.2.28}$$

$$g_5(1)=16-8r-20p-2rp-6p^2=0. \tag{2.2.29}$$

$$g_4(1)=8-4r-12p=0. \tag{2.2.30}$$

(2.2.22) 式表明函数$g_{10}(t)$ 在区域$(1,+\infty)$上是严格单调递减的, 那么从(2.2.23), (2.2.24)式以及$g_{10}(t)$的单调性, 很容易得知对所有的$t\in(1,+\infty)$均有$g_{10}(t)<0$ 成立. 进而暗含了函数$g_9(t)$在区域$(1,+\infty)$上是严格单调递减的。由(2.2.25)式, 不难看出函数对所有的$t\in(1,+\infty)$, 均有$g_9(t)<0$成立。这也就是说$g_8(t)$ 在区域$(1,+\infty)$上是严格单调递减的。于是，由(2.2.26) 式我们不难得到$g_8(t)<0$ 对所有的$t\in(1,+\infty)$ 均成立。则函数$g_6(t)$ 在区域$(1,+\infty)$上是严格递减的。因此，通过逐层逆推，由(2.2.26), (2.2.27)-(2.21)式和(2.2.1)-(2.2.3)式联系$g_8(t)$的单调性，我们得到$g(t)<0$ 对所有的$t\in(1,+\infty)$均成立。

2.3 主要定理的证明

定理2.3.1. 对所有的$a,b>0$, 有如下的不等式成立，

$$I^{\frac{1}{3}}(a,b)L^{\frac{2}{3}}(a,b)\le M_{\frac{4}{9}}(a,b),$$

其中，当且仅当$a=b$时，等号成立。同时，参数$\frac{4}{9}$对于不等式结果来说是最优的临界值.

证明：

首先, 若$a=b$, 不难看出

$$a=I^{\frac{1}{3}}(a,b)L^{\frac{2}{3}}(a,b)=M_{\frac{4}{9}}(a,b)=b.$$

下面的证明中，我们不妨假设$a>b$，令$t=\frac{a}{b}>1$, 通过简单的计算和比较，我们得到

$$\begin{aligned}&L^{\alpha}(a,b)I^{1-\alpha}(a,b)-M_p(a,b)\\ =\ & b\left[\left(\tfrac{t-1}{\log t}\right)^{\alpha}\left(\tfrac{1}{e}t^{\frac{t}{t-1}}\right)^{1-\alpha}-\left(\tfrac{t^p+1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right].\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

设

$$f(t)=\alpha[\log(t-1)-\log\log t]+(1-\alpha)\left(\frac{t\log t}{t-1}-1\right)-\frac{1}{p}\log(1+t^p)+\frac{1}{p}\log 2,\tag{2.3.2}$$

通过计算得到

$$\lim_{t\to1^+}f(t)=0,\tag{2.3.3}$$

$$f'(t)=\frac{g(t)}{t(t-1)^2\log t(1+t^p)},\tag{2.3.4}$$

其中

$$\begin{aligned}g(t)=&-(1-\alpha)(t+t^{p+1})\log^2 t+(t^{p+1}-t^p+t^2-t)\log t\\&-\alpha(t-1)^2(1+t^p).\end{aligned}$$

如果$(\alpha,p)=(\frac{2}{3},\frac{4}{9})$,则由引理2.2.1 and (2.3.4) 可得

$$f'(t)<0\tag{2.3.5}$$

对所有的$t\in(1,+\infty)$均成立。

因此，由(2.3.1)-(2.3.3)联合(2.3.5)式我们得到

$$I^{\frac{1}{3}}(a,b)L^{\frac{2}{3}}(a,b)<M_{\frac{4}{9}}(a,b)$$

对所有的正实数$a,b>0$同时$a\neq b$均成立。

接下来，我们要验证参数$\frac{4}{9}$是不等式结果中的最佳临界值。

对任意的$0<\varepsilon<4/9$, 令$0<x<1$，$x\to 0$,

$$\begin{aligned}
& [I^{\frac{1}{3}}(x+1,1)L^{\frac{2}{3}}(x+1,1)]^{p-\varepsilon}-[M_{\frac{4}{9}+\varepsilon}(x+1,1)]^{p-\varepsilon} \\
= & \left[\tfrac{x}{\log(x+1)}\right]^{\frac{2}{3}(p-\varepsilon)}\left[\tfrac{1}{e}(1+x)^{\frac{1+x}{3x}}\right]^{(p-\varepsilon)}-\tfrac{1+(1+x)^{p-\varepsilon}}{2} \\
= & \frac{f_1(x)}{2\left[\dfrac{\log(1+x)}{x}\right]^{\frac{2}{3}(p-\varepsilon)}},
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

其中

$$f_1(x)=2\left[\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1+x}{3x}}\right]^{(p-\varepsilon)}-\left[\frac{\log(1+x)}{x}\right]^{\frac{2}{3}(p-\varepsilon)}\left[1+(1+x)^{p-\varepsilon}\right].$$

利用泰勒展开式，得到

$$f_1(x)=\frac{\varepsilon(\frac{4}{9}-\varepsilon)}{4}x^2+o(x^2). \tag{2.3.7}$$

方程(2.3.7) 表明对任意的$0<\varepsilon<\frac{4}{9}$, 都存在一个$0<\delta_1(\varepsilon,\alpha)<1$,使得

$$L^{\frac{2}{3}}(a,b)I^{\frac{1}{3}}(a,b)>M_{\frac{4}{9}-\varepsilon}(a,b)$$

对某个$t\in(0,\delta_1)$成立.

定理2.3.2. 对所有的$a,b>0$, 有如下的不等式成立，

$$I^{\frac{2}{3}}(a,b)L^{\frac{1}{3}}(a,b)\leq M_{\frac{5}{9}}(a,b),$$

其中，当且仅当$a=b$时，等号成立。同时，参数$\frac{5}{9}$对于不等式结果来说是最优的临界值.

证明：

首先, 若$a=b$, 不难看出

$$a=I^{\frac{2}{3}}(a,b)L^{\frac{1}{3}}(a,b)=M_{\frac{4}{9}}(a,b)=b.$$

下面的证明中，我们不妨假设$a>b$，令$t=\frac{a}{b}>1$, 通过简单的计算和比较，我们得到

$$\begin{aligned}
& L^{\alpha}(a,b)I^{1-\alpha}(a,b)-M_p(a,b) \\
= & b\left[\left(\tfrac{t-1}{\log t}\right)^{\alpha}\left(\tfrac{1}{e}t^{\frac{t}{t-1}}\right)^{1-\alpha}-\left(\tfrac{t^p+1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right].
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

设

$$f(t) = \alpha[\log(t-1) - \log\log t] + (1-\alpha)\left(\frac{t\log t}{t-1}\right) - \frac{1}{p}\log(1+t^p) + \frac{1}{p}\log 2, \quad (2.3.9)$$

通过计算得到

$$\lim_{t\to 1^+} f(t) = 0, \quad (2.3.10)$$

$$f'(t) = \frac{g(t)}{t(t-1)^2\log t(1+t^p)}, \quad (2.3.11)$$

其中

$$g(t) = -(1-\alpha)(t+t^{p+1})\log^2 t + (t^{p+1} - t^p + t^2 - t)\log t \\ -\alpha(t-1)^2(1+t^p).$$

如果$(\alpha, p) = (\frac{1}{3}, \frac{5}{9})$,则由引理2.2.1 and (2.3.11) 可得

$$f'(t) < 0 \quad (2.3.12)$$

对所有的$t \in (1, +\infty)$均成立.

因此，由(2.3.8)-(2.3.11)联合(2.3.12)式我们得到

$$I^{\frac{2}{3}}(a,b)L^{\frac{1}{3}}(a,b) < M_{\frac{5}{9}}(a,b)$$

对所有的正实数$a, b > 0$同时$a \neq b$均成立.

接下来，我们要验证参数$\frac{5}{9}$ 是不等式结果中的最佳临界值。

对任意的$0 < \varepsilon < 5/9$, 令$0 < x < 1$，$x \to 0$,

$$\begin{aligned} & [I^{\frac{2}{3}}(x+1,1)L^{\frac{1}{3}}(x+1,1)]^{p-\varepsilon} - [M_{\frac{5}{9}+\varepsilon}(x+1,1)]^{p-\varepsilon} \\ = & \left[\frac{x}{\log(x+1)}\right]^{\frac{1}{3}(p-\varepsilon)} \left[\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{2(1+x)}{3x}}\right]^{(p-\varepsilon)} - \frac{1+(1+x)^{p-\varepsilon}}{2} \\ = & \frac{f_2(x)}{2\left[\frac{\log(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{3}(p-\varepsilon)}}, \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

其中

$$f_2(x) = 2\left[\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{2(1+x)}{3x}}\right]^{(p-\varepsilon)} - \left[\frac{\log(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{3}(p-\varepsilon)}\left[1+(1+x)^{p-\varepsilon}\right].$$

利用泰勒展开式，得到

$$f_2(x) = \frac{\varepsilon(\frac{5}{9}-\varepsilon)}{4}x^2 + o(x^2). \quad (2.3.14)$$

方程(2.3.14) 表明对任意的$0<\varepsilon<\frac{5}{9}$, 都存在一个$0<\delta_2(\varepsilon,\alpha)<1$,使得

$$L^{\frac{1}{3}}(a,b)I^{\frac{2}{3}}(a,b)>M_{\frac{5}{9}-\varepsilon}(a,b)$$

对某个$t\in(0,\delta_2)$成立。

定理2.3.3. 对所有的$a,b>0$, 有如下的不等式成立,

$$M_0(a,b)\leq I^{\frac{1}{3}}(a,b)L^{\frac{2}{3}}(a,b),$$

和

$$M_0(a,b)\leq I^{\frac{2}{3}}(a,b)L^{\frac{1}{3}}(a,b),$$

其中，当且仅当$a=b$时，等号成立。同时，参数0 对于不等式结果来说是最优的临界值。

证明:

首先, 若$a=b$, 不难看出

$$a=I^{\frac{2}{3}}(a,b)L^{\frac{1}{3}}(a,b)=M_0(a,b)=b.$$

如下的一些基本的极限估计需要用到。

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{x-1}{x\log x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\log x+1}=0. \tag{2.3.15}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{ex}x^{\frac{x}{x-1}}=\lim_{t\to+\infty}e^{\frac{x}{x-1}\log x-1-\log x}=\lim_{t\to+\infty}e^{\frac{-x+1+\log x}{x-1}}=e^{-1}. \tag{2.3.16}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{x^{\varepsilon}+1}{2x^{\varepsilon}}=\frac{1}{2}. \tag{2.3.17}$$

则对任意的$\varepsilon>0$, 有下面的估计

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\tfrac{L^{\alpha}(1,x)I^{1-\alpha}(1,x)}{M_{\varepsilon}(1,x)}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{x-1}{\log x}\right)^{\alpha}\left(\dfrac{1}{e}x^{\frac{x}{x-1}}\right)^{1-\alpha}}{\left(\dfrac{x^{\varepsilon}+1}{2}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}}\\ =\quad&\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{x-1}{x\log x}\right)^{\alpha}\left(\dfrac{1}{ex}x^{\frac{x}{x-1}}\right)^{1-\alpha}}{\left(\dfrac{x^{\varepsilon}+1}{2x^{\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}}.\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

因此，(2.3.18) 式表明对任意的$\varepsilon>0$, 都存在一个$\mathcal{X}=\mathcal{X}(\varepsilon)>1$ 使得

$$L^{\alpha}(1,x)I^{1-\alpha}(1,x)<M_{\varepsilon}(1,x)$$

对某个$x \in (\mathcal{X}, +\infty)$成立。因此，我们得到不等式

$$M_0(a,b) \le I^{\frac{1}{3}}(a,b)L^{\frac{2}{3}}(a,b),$$

和

$$M_0(a,b) \le I^{\frac{2}{3}}(a,b)L^{\frac{1}{3}}(a,b),$$

对所有的$a,\ b>0$均成立.其中当且仅当$a=b$时等号成立，且参数0对于上面的不等式来说是最佳的临界值。

第 3 章 调和平均、指数平均与幂平均的不等式

3.1 引言

在本章中, 我们研究常指数下两正数的调和平均、指数数平均与幂平均的不等式关系，即$H^{\frac{1}{3}}(a,b)I^{\frac{2}{3}}(a,b)$，$H^{\frac{2}{3}}(a,b)I^{\frac{1}{3}}(a,b)$ 与对应的p 阶的幂平均之间的不等式关系。

对任意的实数$p\in R$, 以两正数a 和b为变量的p阶的幂平均函数$M_p(a,b)$ 有着如下的定义：

$$M_p(a,b)=\begin{cases}\left(\dfrac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, & p\neq 0,\\ \sqrt{ab}, & p=0.\end{cases}$$

在当前所知的许多均值函数不等式的研究结果中, 与幂平均$M_p(a,b)$ 相关的结果引起了广泛的研究和关注. 众所周知的幂平均函数$M_p(a,b)$具有非常理想的性质，即对某一对固定的a 和b 以及$p\in R$ 而言，它是连续函数，且是严格递增的.而本章中研究的调和平均对于某一对固定的a 和b 以及$p\in R$ 而言，也是连续函数，而且是严格递增的. 指数对数平均亦具有相类似的性质. 由于指数平均中包含了常数e, 这给研究指数平均函数的性质带来了一定的困扰, 在证明与指数平均相关的结果的时候，经常会出现一些近似估计和利用已知极限结果的估计。

分别用

$$I(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{e}\left(\dfrac{a^a}{b^b}\right)^{\frac{1}{a-b}}, & b\neq a,\\ a, & b=a,\end{cases}$$

以及

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{b-a}{\log b-\log a}, & b\neq a,\\ a, & b=a,\end{cases}$$

$A(a,b)=(a+b)/2$, $G(a,b)=\sqrt{ab}$ 还有$H(a,b)=2ab/(a+b)$ 分别代表具有两正数指标a 和b的指数平均函数、对数平均函数、算数平均函数、几何平均函数以及调和平均函数那么这些均值函数有着以下的基本关系式。

$$\begin{aligned}\min\{a,b\}\leq H(a,b)=M_{-1}(a,b)\leq G(a,b)=M_0(a,b)\leq L(a,b)\\ \leq I(a,b)\leq A(a,b)=M_1(a,b)\leq \max\{a,b\}\end{aligned}$$

当且仅当$b=a$时，每一个不等式的等号成立.

Alzer 曾证明过如下的不等式关系：

$$\sqrt{G(a,b)A(a,b)}<\sqrt{L(a,b)I(a,b)}<\frac{1}{2}\left(L(a,b)+I(a,b)\right)<\frac{1}{2}\left(G(a,b)+A(a,b)\right).$$

Alzer 和Janous 有如下的结论，即不等式

$$M_{\frac{\log 2}{\log 3}}(a,b)\leq\frac{2}{3}A(a,b)+\frac{1}{3}G(a,b)\leq M_{\frac{2}{3}}(a,b)$$

对所有的$a,b>0$均成立, 等号成立当且仅当$a=b$.

后来, Alzer 和裘松良建立了如下的结果，即不等式

$$\alpha A(a,b)+(1-\alpha)G(a,b)<I(a,b)<\beta A(a,b)+(1-\beta)G(a,b)$$

对所有的$\alpha\leq\frac{2}{3}$, $\beta\geq 2/e=0.73575...$ 成立，这里实数$a,b>0$ 且$a\neq b$.

毛其吉也曾对下面的不等式进行了证明，即不等式

$$M_{\frac{1}{3}}(a,b)\leq\frac{1}{3}A(a,b)+\frac{2}{3}G(a,b)\leq M_{\frac{1}{2}}(a,b)$$

对所有的正实数$a,b>0$成立, 而且不等式左端的临界值$\frac{1}{3}$ 是最佳值。

关于对数平均L 以及指数平均I, 它们与经典的均值算数平均A 和几何平均G 有着如下的关系式

$$G^{\frac{2}{3}}(a,b)A^{\frac{1}{3}}(a,b)<L(a,b)<\frac{1}{3}A(a,b)+\frac{2}{3}G(a,b)$$

同时不等式

$$\frac{1}{3}G(a,b)+\frac{2}{3}A(a,b)<I(a,b)$$

对所有的实数$a,b>0$ 且$a\neq b$均成立。

本章中，我们的目的是建立调和平均H，指数数平均I与幂平均M_p之间的不等式关系式。即$H^{\alpha}(a,b)I^{1-\alpha}(a,b)$ 对于特殊的$\alpha\in(0,1)$ 与幂平均$M_p(a,b)$ 之间的对应关系式如何。通过计算和证明, 我们得到了几个$H(a,b)$, $I(a,b)$ 这些均值函数与幂平均$M_p(a,b)$ 的关系式。

3.2 引理及其证明

为了方便和简化主要结果的证明过程，我们先给出下面的引理，

引理3.2.1 令

$$\begin{aligned}g(t)=&(1-r)[t^{p+2}+t^{p+1}+t^2+t]\log t+rt^{p+3}-(1-r)t^{p+2}\\&+rt^{p+1}+(1-r)t^p-(1-r)t^3-rt^2+(1+r)t-r.\end{aligned}$$

则有如下的估计成立,

1)如果$r=\frac{1}{2}$时$p=-\frac{1}{6}$, 那么函数$g(t)<0$ 对所有的$t\in(1,+\infty)$均成立。

2)如果$r=\frac{2}{3}$时$p=-\frac{4}{9}$, 那么函数$g(t)<0$ 对所有的$t\in(1,+\infty)$均成立。

证明:

为了尽量的简化证明的过程，可以进行一些小小的变换，这并不影响证明的结果。

首先，很容易可以得到

$$g(1)=0, \tag{3.2.1}$$

令$g_1(t)=t^{-p}g'(t)$, 得到

$$\begin{aligned} g_1(t)=&(1-r)[2t^{1-p}+t^{-p}+(p+2)t+p+1]\log t+r(p+3)t^2\\ &-(pr+p+3r+1)t+(1-r)pt^{-1}-3(1-r)t^{2-p},\\ &+(1-3r)t^{1-p}+2t^{-p}+pr+1, \end{aligned}$$

$$g_1(1)=0, \tag{3.2.2}$$

令$g_2(t)=t^{1+p}g_1'(t)$, 得到

$$\begin{aligned} g_2(t)=&(1-r)[(p+2)t^{1+p}+2(1-p)t-p]\log t-3(1-r)(2-p)t^2\\ &(3pr-5r-p+3)t+2r(p+3)t^{2+p}-(2pr+5r-1)t^{1+p}\\ &+(1-r)(p+1)t^p-p(1-r)t^{p-1}+(1-r-2p), \end{aligned}$$

$$g_2(1)=0, \tag{3.2.3}$$

令$g_3(t)=t^{-p}g_2'(t)$, 得到

$$\begin{aligned} g_3(t)=&(1-r)[2(1-p)t^{-p}+(p+1)(p+2)]\log t-6(1-r)(2-p)t^{1-p}\\ &+(5pr-3p-7r+5)t^{-p}-p(1-r)t^{-1-p}+2r(p+3)(p+2)t\\ &+p(p+1)(1-r)t^{-1}-p(p-1)(1-r)t^{-2}\\ &+(3+2p-7r-8pr-2rp^2), \end{aligned}$$

$$g_3(1)=6p+10r-4, \tag{3.2.4}$$

令$g_4(t)=t^{1+p}g_3'(t)$, 得到

$$\begin{aligned} g_4(t)=&-2p(1-p)(1-r)t\log t+(p+1)(p+2)(1-r)t^p\\ &-p(p+1)(1-r)t^{p-1}+2p(p-1)(1-r)t^{p-2}+p(p+1)(1-r)t^{-1}\\ &-6(1-p)(2-p)(1-r)t+2r(p+2)(p+3)t^{1+p}\\ &-5rp^2+3p^2+9pr-7p-2r+2, \end{aligned}$$

$$g_4(1) = 12p + 20r - 8, \tag{3.2.5}$$

令$g_5(t) = t^{-p}g_4'(t)$, 得到

$$\begin{aligned}g_5(t) = &-6(1-p)(2-p)(1-r)t^{3-p} - 2p(1-p)(1-r)t^{2-p}\\&-p(p+1)(p-1)(1-r)t + p(p+1)(p+2)(1-r)t^2\\&+2r(p+1)(p+2)(p+3)t^3 - p(p+1)(1-r)t^{1-p}\\&+2p(p-1)(p-2)(1-r),\end{aligned}$$

$$g_5(1) = 2[p^3 - 4p^2 + 11p - 6 + 10rp^2 + 12r], \tag{3.2.6}$$

令$g_6(t) = t^{-2}g_5'(t)$, 得到

$$\begin{aligned}g_6(t) = &p(1-r)[-2(1-p)(2-p)t^{-p-1} + 2(p+1)(p+2)t^{-1}\\&-(1+p)(1-p)t^{-2-p} - (p+1)(p-1)t^{-2}]\\&-6(1-p)(2-p)(3-p)(1-r)t^{-p} + 6r(1+p)(2+p)(3+p)\end{aligned}$$

$$g_6(1) = 6[p^3 - 4p^2 + 11p - 6 + 10rp^2 + 12r], \tag{3.2.7}$$

令$g_7(t) = t^{1+p}g_6'(t)$, 得到

$$\begin{aligned}g_7(t) = &p(1-r)[-2(1-p)(1+p)(2-p)t^{-1} - 2(p+1)(p+2)t^{p-1}\\&(1+p)(1-p)(2+p)t^{-2} + 2(p+1)(p-1)t^{p-2}\\&+6(1-p)(2-p)(3-p)]\end{aligned}$$

$$g_7(1) = p(1-r)(-5p^3 + 30p^2 - 73p + 36), \tag{3.2.8}$$

令$g_8(t) = t^3g_7'(t)$, 得到

$$g_8(t) = 2p(1-p^2)(1-r)[(p+2)t^{p+1} - (p-2)t^p + (p-2)t - (p+2)]$$

$$g_8(1) = 0, \tag{3.2.9}$$

令$g_9(t) = t^{-p}g_8'(t)$, 得到

$$g_9(t) = 2p(1-p^2)(1-r)[(p-2)t^{-p} - p(p-2)t^{-1} + (1+p)(2+p)]$$

$$g_9(1) = 12p^2(1-p^2)(1-r), \tag{3.2.10}$$

最后令$g_{10}(t) = t^2g_9'(t)$, 得到

$$g_{10}(t) = 2p^2(1-p^2)(1-r)[(2-p)t^{1-p} + (p-2)], \tag{3.2.11}$$

$$g_{10}(1) = 0. \tag{3.2.12}$$

现在分情况讨论。

1) 如果$r=\frac{1}{2}$ 且$p=-\frac{1}{6}$, 那么从(3.2.12) 以及(3.2.4)-(3.2.10), 得到如下的一些估计,

$$g_9(1)=12p^2(1-p^2)(1-r)>0, \tag{3.2.13}$$

$$g_7(1)=p(1-r)(-5p^3+30p^2-73p+36)<0, \tag{3.2.14}$$

$$g_6(1)=6[p^3-4p^2+11p-6+10rp^2+12r]<0, \tag{3.2.15}$$

$$g_5(1)=2[p^3-4p^2+11p-6+10rp^2+12r]<0, \tag{3.2.16}$$

$$g_4(1)=0, \tag{3.2.17}$$

$$g_3(1)=0, \tag{3.2.18}$$

还有

$$\lim_{t\to+\infty}g_7(t)<0, \tag{3.2.19}$$

$$\lim_{t\to+\infty}g_6(t)=-\infty. \tag{3.2.20}$$

从(3.2.11)不难看出函数$g_{10}(t)$ 在区域$(1,+\infty)$上是严格递增的函数, 那么由$g_{10}(t)$的单调性再联系(3.2.9)-(3.2.12) 以及(3.2.13), 可以得出函数$g_8(t)>0$ 对所有的$t\in(1,+\infty)$均成立. 这就表明函数$g_7(t)$ 在区域$(1,+\infty)$上是严格递增的。联合(3.2.14)和(3.2.19), 就可以得到在区域$(1,+\infty)$上函数$g_7(t)<0$. 这就意味着$g_6(t)$ 在区域$(1,+\infty)$ 上是严格递减的函数。从(3.2.15) 以及(3.2.20), 不难得到对所有的$t\in(1,+\infty)$都成立$g_6(t)<0$. 这样就表明函数$g_5(t)$ 在区域$(1,+\infty)$上是严格递减的。结合(3.2.16) 以及函数$g_5(t)$ 的单调性, 就可以得到对所有的$t\in(1,+\infty)$ 均有$g_5(t)<0$成立. 如此逐层逆推, 联合(3.2.17), (3.2.18) 以及(3.2.1)-(3.2.3) 还有函数$g_5(t)$的单调递减性, 就可以得出对于所有的$t\in(1,+\infty)$均有$g(t)<0$ 成立。

2) 如果$r=\frac{2}{3}$ 且$p=-\frac{4}{9}$, 那么从(3.2.12) 以及(3.2.4)-(3.2.10), 得到如下的估计,

$$g_9(1)=12p^2(1-p^2)(1-r)>0, \tag{3.2.21}$$

$$g_7(1)=p(1-r)(-5p^3+30p^2-73p+36)<0, \tag{3.2.22}$$

$$g_6(1)=6[p^3-4p^2+11p-6+10rp^2+12r]<0, \tag{3.2.23}$$

$$g_5(1)=2[p^3-4p^2+11p-6+10rp^2+12r]<0, \tag{3.2.24}$$

$$g_4(1)=0, \tag{3.2.25}$$

$$g_3(1)=0, \tag{3.2.26}$$

还有

$$\lim_{t\to+\infty}g_7(t)<0, \tag{3.2.27}$$

$$\lim_{t\to+\infty} g_6(t) = -\infty. \tag{3.2.28}$$

从(3.2.11)不难看出函数$g_{10}(t)$在区域$(1,+\infty)$上是严格递增的函数, 那么由$g_{10}(t)$的单调性再联系(3.2.17)-(3.2.20) 以及(3.2.21), 可以得出函数$g_8(t) > 0$ 对所有的$t \in (1,+\infty)$均成立。这就表明函数$g_7(t)$ 在区域$(1,+\infty)$上是严格递增的。联合(3.2.22) 和(3.2.27), 就可以得到在区域$(1,+\infty)$上函数$g_7(t) < 0$. 这就意味着$g_6(t)$在区域$(1,+\infty)$ 上是严格递减的函数。从(3.2.23) 以及(3.2.28), 不难得到对所有的$t \in (1,+\infty)$都成立$g_6(t) < 0$. 这样就表明函数$g_5(t)$ 在区域$(1,+\infty)$上是严格递减的. 结合(3.2.24) 以及函数$g_5(t)$ 的单调性, 就可以得到对所有的$t \in (1,+\infty)$ 均有$g_5(t) < 0$成立。如此逐层逆推, 联合(3.2.25), (3.2.26) 以及(3.2.1)-(3.2.3) 还有函数$g_5(t)$的单调递减性, 就可以得出对于所有的$t \in (1,+\infty)$均有$g(t) < 0$ 成立。

3.3 主要定理及其证明

定理3.3.1. 对两实数$a, b > 0$, 有如下的不等式成立,

$$H^{\frac{1}{2}}(a,b)I^{\frac{1}{2}}(a,b) \geq M_{-\frac{1}{6}}(a,b),$$

其中当且仅当$a = b$ 时，等号成立. 这里的参数临界值$-\frac{1}{6}$, 对于不等式来说是最佳的。

证明:

首先, 当$a = b$时, 由经典已知结果, 有下面的关系,

$$a = H^{\frac{1}{2}}(a,b)I^{\frac{1}{2}}(a,b) = M_{-\frac{1}{6}}(a,b) = b.$$

接下来的证明中, 不妨假设$a > b$, 令$t = \frac{a}{b} > 1$, 通过简单的计算和比较, 得到估计如下

$$\begin{aligned} & M_p(a,b) - H^{\alpha}(a,b)I^{1-\alpha}(a,b) \\ = \; & b\left[\left(\tfrac{t^p+1}{2}\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\tfrac{2t}{t+1}\right)^{\alpha}\left(\tfrac{1}{e}\cdot t^{\frac{t}{t-1}}\right)^{1-\alpha}\right] \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

设函数

$$f(t) = \frac{1}{p}\log\frac{1+t^p}{2} - \alpha\log\left(\frac{2t}{t+1}\right) - (1-\alpha)\frac{t}{t-1}\log t + (1-\alpha), \tag{3.3.2}$$

通过计算得知

$$\lim_{t\to1^+} f(t) = 0, \tag{3.3.3}$$

$$f'(t) = \frac{g(t)}{t(t+1)(t^p+1)(t-1)^2}, \tag{3.3.4}$$

这里

$$\begin{aligned}g(t) = & (1-\alpha)[t^{p+2}+t^{p+1}+t^2+t]\log t+\alpha t^{p+3} \\ & -(1-\alpha)t^{p+2}+\alpha t^{p+1}+(1-\alpha)t^p-(1-\alpha)t^3 \\ & -\alpha t^2+(1+\alpha)t-\alpha.\end{aligned}$$

如果$(\alpha,p)=(\frac{1}{2},-\frac{1}{6})$, 那么从引理3.2.1 和(3.3.4) 可以得出

$$f'(t)<0 \tag{3.3.5}$$

对所有的$t\in(1,+\infty)$都成立。

因此, 从(3.3.1)-(3.3.3) 以及(3.3.5) 就可以得到$H^{\frac{1}{2}}(a,b)I^{\frac{1}{2}}(a,b) > M_{-\frac{1}{6}}(a,b)$, 对满足$a,b>0$ 且$a\neq b$ 的两正数均成立。

接下来, 将证明参数$-\frac{1}{6}$ 是最准确的临界值。

对于任意的$0<\varepsilon<1/6$, 令$0<x<1$ $x\to 0$,. 利用泰勒展开式, 通过计算得到如下估计,

$$\begin{aligned} & \log\left[H^{\frac{1}{2}}(1,1+x)I^{\frac{1}{2}}(1,1+x)\right]-\log M_{-\frac{1}{6}+\varepsilon}(1,1+x) \\ = & \frac{1}{2}\log\left[\frac{2(1+x)}{x+2}\right]+\frac{1+x}{2x}\log(1+x)-\frac{1}{2}-\frac{6}{6\varepsilon-1}\log\frac{1+(1+x)^{-\frac{1}{6}+\varepsilon}}{2} \\ = & -\frac{\varepsilon}{8}x^2+o(x^2),\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

不难看出方程(3.3.6) 表明对于任意的$0<\varepsilon<1/6$, 都存在$0<\delta=\delta(\varepsilon)<1$, 使得

$$H^{\frac{1}{2}}(a,b)I^{\frac{1}{2}}(a,b)<M_{-\frac{1}{6}+\varepsilon}(a,b),$$

对于某个$x\in(0,\delta)$是成立的。

定理3.3.2. 对两实数$a,b>0$, 有如下的不等式成立,

$$H^{\frac{2}{3}}(a,b)I^{\frac{1}{3}}(a,b)\geq M_{-\frac{4}{9}}(a,b),$$

其中当且仅当$a=b$ 时，等号成立. 这里的参数临界值$-\frac{4}{9}$ 对于不等式来说是最佳的.

证明:

首先, 当$a=b$时, 由经典已知结果, 有下面的关系,

$$a=H^{\frac{2}{3}}(a,b)I^{\frac{1}{3}}(a,b)=M_{-\frac{4}{9}}(a,b)=b.$$

接下来的证明中, 不妨假设$a>b$, 令$t=\frac{a}{b}>1$, 通过简单的计算和比较, 得到估计如下

$$\begin{aligned} & M_p(a,b)-H^{\alpha}(a,b)I^{1-\alpha}(a,b) \\ = & b\left[\left(\frac{t^p+1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}-\left(\frac{2t}{t+1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{e}\cdot t^{\frac{t}{t-1}}\right)^{1-\alpha}\right].\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

设函数

$$f(t)=\frac{1}{p}\log\frac{1+t^p}{2}-\alpha\log\left(\frac{2t}{t+1}\right)-(1-\alpha)\frac{t}{t-1}\log t+(1-\alpha), \tag{3.3.8}$$

通过计算得知

$$\lim_{t\to 1^+}f(t)=0, \tag{3.3.9}$$

$$f'(t)=\frac{g(t)}{t(t+1)(t^p+1)(t-1)^2}, \tag{3.3.10}$$

这里

$$\begin{aligned}g(t)=&(1-\alpha)[t^{p+2}+t^{p+1}+t^2+t]\log t+\alpha t^{p+3}\\&-(1-\alpha)t^{p+2}+\alpha t^{p+1}+(1-\alpha)t^p-(1-\alpha)t^3\\&-\alpha t^2+(1+\alpha)t-\alpha.\end{aligned}$$

如果$(\frac{2}{3},-\frac{4}{9})$, 那么从引理3.2.1 和式(3.3.4) 可以得出

$$f'(t)<0 \tag{3.3.11}$$

对所有的$t\in(1,+\infty)$都成立.

因此, 从(3.3.7)-(3.3.9) 以及(3.3.10) 就可以得到$H^{\frac{2}{3}}(a,b)I^{\frac{1}{3}}(a,b)>M_{-\frac{4}{9}}(a,b)$ 对满足$a,b>0$ 且$a\neq b$ 的两正数均成立。

接下来, 将证明参数$-\frac{4}{9}$ 是最准确的临界值。

对于任意的$0<\varepsilon<\frac{4}{9}$, 令$0<x<1$ $x\to 0$, 利用泰勒展开式, 通过计算得到如下估计,

$$\begin{aligned}&\log\left[H^{\frac{2}{3}}(1,1+x)I^{\frac{1}{3}}(1,1+x)\right]-\log M_{-\frac{4}{9}+\varepsilon}(1,1+x)\\=&\ \frac{2}{3}\log\left[\frac{2(1+x)}{x+2}\right]+\frac{1+x}{3x}\log(1+x)-\frac{1}{3}-\frac{9}{9\varepsilon-4}\log\frac{1+(1+x)^{-\frac{4}{9}+\varepsilon}}{2}\\=&\ -\frac{\varepsilon}{8}x^2+o(x^2).\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

不难看出方程(3.3.12) 表明对于任意的$0<\varepsilon<1/6$, 都存在$0<\delta=\delta(\varepsilon)<1$, 使得

$$H^{\frac{2}{3}}(a,b)I^{\frac{1}{3}}(a,b)<M_{-\frac{4}{9}+\varepsilon}(a,b),$$

对于某个$x\in(0,\delta)$是成立的。

定理3.3.3. 对两实数$a,b>0$, 有如下的不等式成立,

$$H^{\frac{1}{3}}(a,b)I^{\frac{2}{3}}(a,b)\geq M_0(a,b).$$

其中当且仅当$a=b$ 时, 等号成立. 这里的参数临界值0 对于不等式来说是最佳的.

证明:

对于任意的$\varepsilon > 0$, 进行如下的极限估计,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{M_\varepsilon(1,x)}{H^{\frac{1}{3}}(1,x)I^{\frac{2}{3}}(1,x)} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{x^\varepsilon+1}{2}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}}{\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left[\dfrac{1}{e}(x)^{\frac{x}{x-1}}\right]^{\frac{2}{3}}} \qquad (3.3.13)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{2}{3}}(1+x^{-\varepsilon})^{\frac{1}{\varepsilon}}(x+1)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{\varepsilon}}x^{\frac{2}{3(x-1)}}} = +\infty.\end{aligned}$$

方程(3.3.13) 表明对任意的$\varepsilon > 0$, 都存在$\mathcal{X} = \mathcal{X}(\varepsilon) > 1$, 使得

$$M_\varepsilon(1,x) > H^{\frac{1}{3}}(1,x)I^{\frac{2}{3}}(1,x)$$

对某个$x \in (\mathcal{X}, +\infty)$成立。因此, 可以得到不等式$M_0(a,b) \le H^{\frac{1}{3}}(a,b)I^{\frac{2}{3}}(a,b)$ 对所有的$a, b > 0$成立, 其中当且仅当$a = b$时, 等号成立。这里的参数0 作为不等式的下临界值来说是准确的。

注释3.3.1. 对两实数$a, b > 0$ 的调和平均函数、指数平均函数以及幂平均函数而言, 其形式为

$$H^{\frac{2}{3}}(a,b)I^{\frac{1}{3}}(a,b) \le M_p(a,b).$$

的不等式很难找到一个准确的p值, 这一点从引理3.2.1 的证明过程中不难看出, 在r取得$\frac{2}{3}$, 一些函数的需要逆推单调性的时候, 很难界定某些函数的准确单调性结果, 因此得到的结果是很难以准确结果而出现的。

结 论

不等式的概念诞生非常早，早在人类以数量的形式对自然界的问题开始探寻的时候，不等式就出现了，随着数学基础的建立，数学分支的蓬勃发展，不等式已经成为了数学这门古老的自然科学中一个重要的分支，为数学科学的进步和发展做出了重要的贡献。

与幂平均函数$M_p(a,b)$ 性质相关的一系列不等式相关问题在近些年的均值函数不等式的研究中被许多的数学家所关注，而相对复杂的指数平均函数与对数函数的研究结果仍不是很完美。在本文中现在，我们首先引入一些经典均值函数的概念。

幂平均函数

$$M_p(a,b)=\begin{cases}\left(\dfrac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, & p\neq 0,\\ \sqrt{ab}, & p=0.\end{cases}$$

指数平均

$$I(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{e}\left(\dfrac{a^a}{b^b}\right)^{\frac{1}{a-b}}, & b\neq a,\\ a, & b=a.\end{cases}$$

对数平均

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{b-a}{\log b-\log a}, & b\neq a,\\ a, & b=a.\end{cases}$$

还有经典的算术$A(a,b)=(a+b)/2$，几何平均$G(a,b)=\sqrt{ab}$，调和平均$H(a,b)=2ab/(a+b)$，其中$a,b>0$。这些经典均值有如下的关系，

$$\begin{aligned}\min\{a,b\}\leq H(a,b)=M_{-1}(a,b)\leq G(a,b)=M_0(a,b)\leq L(a,b)\\ \leq I(a,b)\leq A(a,b)=M_1(a,b)\leq\max\{a,b\}\end{aligned}$$

其中当且仅当$b=a$时，每个不等式的等号成立。

这些都是均值函数不等式中的经典平均值函数，目前的一系列均值函数不等式的研究都是建立在与这些经典均值函数相关的基础上了，在本文中，我们对这些经典均值函数与幂平均函数的不等式关系进行了研究和讨论。

与幂平均函数$M_p(a,b)$ 性质相关的一系列不等式相关问题在近些年关于均值函数不等式的研究中被许多的数学家所关注，这些不等式结果以非常完美的形式出现，可参见文献[8-33]。众所周知，幂平均函数$M_p(a,b)$的性质非常好。对于固定的两正数a和b，具有$p\in R$阶的幂平均函数是连续的，且是严格递增的。

与幂平均值函数不同的是，指数平均函数以及对数平均函数由于其定义的形式较为复杂，给相关的证明和计算带来很大的困难，目前与指数均值函数，以及对数均值函数相关的结果仍是非常理想，同时，这也是一个值得考虑的问题。

在本文第二章中，我们尝试考虑对数均值函数、指数均值函数与幂平均函数的不等式关系，目的是建立两正数对数平均$L(a,b)$、指数平均$I(a,b)$与幂平均$M_p(a,b)$常数指数下相关联的几个不等式。

定理2.3.1. 对所有的$a,b>0$, 有如下的不等式成立，

$$I^{\frac{1}{3}}(a,b)L^{\frac{2}{3}}(a,b)\le M_{\frac{4}{9}}(a,b),$$

其中，当且仅当$a=b$时，等号成立。同时，参数$\frac{4}{9}$ 对于不等式结果来说是最优的临界值。

定理2.3.2. 对所有的$a,b>0$, 有如下的不等式成立，

$$I^{\frac{2}{3}}(a,b)L^{\frac{1}{3}}(a,b)\le M_{\frac{5}{9}}(a,b),$$

其中，当且仅当$a=b$时，等号成立。同时，参数$\frac{5}{9}$ 对于不等式结果来说是最优的临界值。

定理2.3.3. 对所有的$a,b>0$, 有如下的不等式成立，

$$M_0(a,b)\le I^{\frac{1}{3}}(a,b)L^{\frac{2}{3}}(a,b),$$

和

$$M_0(a,b)\le I^{\frac{2}{3}}(a,b)L^{\frac{1}{3}}(a,b),$$

其中，当且仅当$a=b$时，等号成立。同时，参数0 对于不等式结果来说是最优的临界值。

应用极限比较的方法，结合泰勒展开式的计算比较，我们得出了几个常系数下，两正数对数平均、指数平均与幂平均之间的不等式，得到了较为准确的量化关系。并利用泰勒展开式验证了，当幂平均的阶p取得特定的数值的时候，不等式的最佳性质。其中也验证了常数指数为特定值的时候，得到的结果与经典结果是相一致的。

在本文的第三章中，我们建立了调和平均$H(a,b)$，指数平均$I(a,b)$ 和幂平均$M_p(a,b)$之间的几个不等式。

定理3.3.1. 对两实数$a,b>0$, 有如下的不等式成立，

$$H^{\frac{1}{2}}(a,b)I^{\frac{1}{2}}(a,b)\ge M_{-\frac{1}{6}}(a,b),$$

其中当且仅当$a=b$时，等号成立. 这里的参数临界值$-\frac{1}{6}$, 对于不等式来说是最佳的。

定理3.3.2. 对两实数$a,b>0$, 有如下的不等式成立,

$$H^{\frac{2}{3}}(a,b)I^{\frac{1}{3}}(a,b)\geq M_{-\frac{4}{9}}(a,b),$$

其中当且仅当$a=b$时，等号成立。这里的参数临界值$-\frac{4}{9}$对于不等式来说是最佳的。

定理3.3.3. 对两实数$a,b>0$, 有如下的不等式成立

$$H^{\frac{1}{3}}(a,b)I^{\frac{2}{3}}(a,b)\geq M_0(a,b),$$

其中当且仅当$a=b$时，等号成立. 这里的参数临界值0对于不等式来说是最佳的。

同样应用极限比较、结合泰勒展开式的方法，通过计算比较某些函数的凸性、正负性来得到我们需要的结果。本章中得到的是在常指数下，调和平均、指数平均若干幂形式与幂平均的不等式关系。同时也通过泰勒展开式的计算和比较，验证了在幂平均的阶p取得特定的数值的时候，不等式的最佳性质。

本文的创新之处在于，建立了特定常数指数下，对数平均函数、指数平均函数、调和平均函数与经典的幂平均函数之间的新的不等式关系，为下一步变系数的推广做好了准备，这些结果是新的，也是有效的。本文所用的方法和工具相对简单，通过一些经典研究结果的分析，应用极限比较，泰勒公式的各种形式的展开，再加上实分析中一些简单的凸函数性质判断的方法和工具对我们的结果进行求证，尽量简化了计算和证明过程，但同时也验证了这些不等式结果的相关临界值的准确性和不可提高性。

参考文献

[1] Nihin P J. How Mathematicians Discovered Many Clever Ways to Make Things as Small or as Large as Possible. New Jersey: Princeton University Press, 2004, 55-74

[2] Niculescu C P, A New Look at Newton's Inequalities. J. I. Pure. Appl. Math., 2000, 1(2): article 17

[3] 蓝纪正, 朱恩宽. 欧几里得几何原本(译). 北京: 九章出版社, 1992, 49-66

[4] Dragomir S S. A Survey on Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz Type Discrete Inequality. J. I. Pure. Appl. Math., 2003, 4(3): article 63

[5] Kazarinoff N D. Analytic Inequalities. Nicholas: Dover Publications, 2003, 143-156

[6] Wu S H. Generalization and sharpness of the power means inequality and their applications. J. Math. Anal. Appl., 2005, 312(2): 637-652

[7] Richards K C. Sharp power mean bounds for the Gaussian hypergeometric function. J. Math. Anal. Appl., 2005, 308(1): 303-313

[8] Hästö P A. Optimal inequalities between Seiffert's mean and power means. Math. Inequal. Appl., 2004, 7(1): 47-53

[9] 毛其吉. 两正数的幂平均、对数平均与对偶海伦平均. 苏州教育学院学报, 1999, 1(2): 82-85

[10] Qi F, Guo B N. An inequality between ratio of extended logarithmic means and ratio of the exponential means. Taiwanese J. Math., 2003, 7(2): 229-237

[11] Alzer H. A power mean inequality for the gamma function. Monatsh. Math., 2000, 131(3): 179-188

[12] Tarnavas C D, Tarnavas D D. An inequality for mixed power means. Math. Inequal. Appl., 1999, 2(2): 175-181

[13] Bukor T J, Zsilinszky L. The logarithmic mean and the power mean of positive numbers. Octogon Math. Mag., 1994, 2(1): 19-24

[14] Pečarić J E. Generalization of the power means and their inequalities. J. Math. Anal. Appl., 1991, 161(2): 395-404

[15] Chen J, Hu B. The identric mean and the power mean inequalities of Ky Fan type. Facta Univ. Ser. Math. Inform., 1989, 4: 15-18

[16] Bullen P S, Mitrinović D S, Vasić P M. Means and their inequalities. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co., 1988, 45-76

[17] Imoru C O. The power mean and the logarithmic mean. Internat. J. Math. Math. Sci., 1982, 5(2): 337-343

[18] Sándor J. A note on some inequalities for means. Arch. Math.(Basel), 1991, 56(5): 471-473

[19] Lin T P. The power mean and the logarithmic mean. Amer. Math. Monthly, 1974, 81: 879-883

[20] Dale J. Some properties of the exponetial mean. Amer. J. Math., 1925, 47(2): 71-90

[21] Alzer H, Janous W. Solution of problem 8*. Crux. Math., 1987, 13: 173-178

[22] Leach E B, Sholander M C. Extended mean values II. J. Math. Anal. Appl., 1983, 92(1): 207-233

[23] Stolarsky K B. The power and gerneralized logarithmic means. Amer. Math. Monthly, 1980, 87(7): 545-548

[24] Alzer H, Qiu S L. Inequalities for means in two variables. Arch. Math. (Basel), 2003, 80(2): 201-215

[25] Carlson B.C. The logarithmic mean. Amer. Math. Monthly, 1972, 79: 615-618

[26] Burk F. The geometric, logarithmic, and arithmetic mean inequalities. Amer. Math. Monthly, 1987, 94(6):527-528

[27] Alzer H. Ungleichungen für Mittlewerte. Arch. Math.(Basel), 1986, 47(5): 422-426

[28] Pittenger A O. Inequalities between arithmetic and logarithmic means. Univ. Beogard. Publ. Elecktrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., 1981, 678-715

[29] Pittenger A O. The symmetric, logarithmic and power means. Univ. Beogard. Publ. Elecktrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., 1981, 678-715

[30] Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of mathematical functions with formulas. New York: graphs and mathematical tables, 1965, 323-365

[31] Janous W, A note on generalized Heronian means. Math. Inequ. Appl., 2001, 4(3): 369-375

[32] Apostol T M. Introduction to analytic number theory. New York: Springer, 1976, 146-151

[33] Bochner S. Harmonic analysis and the theory of probability. Los Angeles: Univ. of California Press, 1955, 215-264

[34] Chu Yuming, Wang Gendi, Zhang Xiaohui,et al. Generalized convexity and inequalities involving special functions. J. Math. Anal. Appl., 2007, 336(2): 768-776,

[35] Yuming Chu and Yupei Lv, The Schur Harmonic Convexity of the Hamy Symmetric Function and Its Applications. J. Inequ. Appl., 2009, 46-56

[36] 褚玉明，夏卫锋，赵铁洪. 一类对称函数的Schur凸性. 中国科学, 2009，39(11): 1267-1277

[37] Chu Yuming, Xia Weifeng. Solution of an open problem for Schur convexity or concavity of the Gini mean values. Sci. in China, Ser. A, 2009, 52(10): 2099-2106

[38] Boyd A V. Gurland's inequality for the gamma function. Skand. Aktuarietidskr, 1961: 134-135

[39] Davis P J. Leonhard Euler's integral: A historical profile of the gamma function. Amer. Math. Monthly, 1959, 66: 849-869

[40] Day W A. On monotonicity of the relaxation functions of viscoelastic materials. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1970, 67: 503-508

[41] Ismail M E H, Lorch L, Muldoon M E. Completely monotonic functions associated with the gamma function and its q-analogues. Math. Anal. Appl., 1986, 116: 1-9

[42] Kershaw D. Some extensions of Gautschi's inequalities for the gamma function. Math. Comp., 1983, 41: 607-611

[43] Eliezer C J, Daykin D E. Generalizations and applications of Cauchy-Schwarz inequalities. Math. Oxford. Ser., 1967, 18(2): 357-360

[44] Erber T. The gamma function inequalities of Gurland and Gautschi. Skand. Aktuarietidskr., 1961, 1960: 27-28

[45] Fink A M. Kolmogorov-Landau inequalities for monotone functions. Math. Anal. Appl., 1982, 90: 251-258

[46] Kershaw D, Laforgia A. Monotonicity results for the gamma function. Atti. Accad. Sci. Torino.,1985, 1(19): 127-133

[47] Kimberling C H. A probabilistic interpretation of complete monotonicity. Aequationes Math., 1974, 10: 152-164

[48] Lorch L. Inequalities for ultraspherical polynomials and the gamma function. Approx. Theory, 1984, 40: 115-120

[49] Luke Y L. Inequalities for the gamma function and its logarithmic derivative. Math. Balkanica, 1972, 2: 118-123

[50] Marshall A W, Olkin I. Inequalities: Theory of majorization and its applications. New York: Academic Press, 1979, 432-468

[51] Mitrinović D S. Analytic inequalities. New York: Springer, 1970, 44-65

致 谢

在此论文付梓之际，掩卷思量，内心感慨无限，在论文撰写过程中，我得到了湖南大学数学与计量经济学院的领导、老师们和同门师兄弟的关心和极大的帮助，正是在这些关心和帮助下，我才得以完成论文的创作。

衷心感谢我的导师蒋月评教授，本论文的撰写，从选材、如何进行论文的创作以及从修改到定稿的整个过程，都是在我的导师蒋月评教授悉心指导下完成的。蒋教授渊博的数学学识，坚实的研究功底，严谨求实的治学态度，精益求精的工作作风，诲人不倦的高尚师德，平易近人的人格魅力，对我影响深远，让我铭记在心，在此谨向蒋教授表达我的由衷敬意。

衷心感谢李董辉、马柏林等教授的悉心指导和帮助，同时感谢湖南大学数学与计量经济学院的领导和老师们。

衷心感谢史明宇博士给予的指导和帮助，因为他关键性的点拨指导，使我豁然开朗，给了我探索的信心。

衷心感谢廖秋根等同门师兄弟给予的帮助和鼓励，相互间的切磋、讨论和鼓励，受益匪浅。

衷心感谢我的夫人王泉香，这些年来她操持家务，让我专心学习，她的督促和鼓励是我多年坚持的动力。